



## Komandu olimpiāde matemātikā

Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-5 punktiem. Uzdevumu risināšanai dotas 3 astronomiskās stundas. Risinājumos ir jāuzrāda veiktie aprēķini un risinājuma gaita.

### Uzdevumi 9. klasei

1. Vai eksistē tādi dažādi naturāli skaitļi  $a, b, n, m$ , ka  $a^n - b^n = a^m - b^m$ ?
2. Ancei ļoti patīk risināt uzdevumus. Ja Ance nerisina uzdevumus, tad viņa lasa grāmatas par to, kā risināt uzdevumus. Un ja Ance nelasa grāmatas, tad viņa skatās japāņu multfilmas. Pieņemot, ka Ance nevar darīt divas lietas vienlaikus, ko Ance dara šobrīd?
3. Cik dažādos veidos var katrā kastīte ierakstīt + vai – zīmi tā lai izteiksmes vērtība dalītos ar 3?

$$4 \square 1 \square 2 \square 3 \square 6 \square 3 \square 9 \square 7$$

4.  $9 \times 9$  kvadrātiskā režģī uzrakstīti skaitļi  $1, 2, \dots, 81$ . Pierādīt, ka noteikti var atrast  $2 \times 2$  kvadrātu, kurā summa ir lielāka par 137.
5. Salmo uz tāfeles ir uzrakstījis skaitļus  $1, 2, \dots, 2019$ . Viņš izvēlas divus skaitļus  $a$  un  $b$ , tādus, ka  $a \geq b$ , nodzēš tos, un to vietā uzraksta skaitli  $a - b$  uz tāfeles. Darbība tiek atkārtota, līdz pēc kāda laika uz tāfeles ir uzrakstīts tikai viens skaitlis. Noteikt vai skaitlis ir pāra vai nepāra.
6. Punkti  $P$  and  $Q$  izvēlēti uz  $\triangle ABC$  malas  $BC$  tā, ka  $P$  ir starp  $B$  and  $Q$ , un stari  $AP$  un  $AQ$  sadala leņķi  $\angle BAC$  trīs vienādās daļās. Taisne kas paralēla  $AQ$  un iet cauri  $P$  krusto malu  $AB$  punktā  $D$ . Taisne kas paralēla  $AP$  un iet caur punktu  $Q$  krusto malu  $AC$  punktā  $E$ . Vai iespējams ka  $DE$  ir  $\triangle ABC$  viduslīnija?  
**Piezīme:** Par trijstūra viduslīniju sauc taisni, kas iet cauri divu dažādu trijstūra malu viduspunktiem.
7. Uz galda ir  $n$  cepumu kaudzītes, katrā pa 2 cepumiem. Aivars un Bille spēlē ar tām spēli. Vienā gājienā katrs spēlētājs var izvēlēties vienu cepumu kaudzīti un apēst no tās vismaz vienu cepumu (drīkst apēst arī abus divus, ja kaudzītē ir divi cepumi). Uzvar tas spēlētājs, kurš apēd pēdējo cepumu. Kurš no spēlētājiem var garantēt uzvaru, ja Aivars sāk?
8. Atrast lielāko naturālo skaitli  $n$  tādu, ka  $n^2 + 9n$  ir naturāla skaitļa kvadrāts.
9. Sadalīt regulāru sešstūri a) 9 un b) 8 vienādās daļās.

10. Ne visai tālā nākotnē uz Marsa tikusi izveidota pirmā apdzīvotā Marsa bāze. Zinātnieki vēlas veikt ekspedīciju uz tuvāko Marsa krāteri, kas atrodas 400 km attālumā. Diemžēl pieejamais visurgājējs patērē 20 litrus šķidrā ūdeņraža uz katriem 100 nobrauktajiem kilometriem un tā degvielas ietilpība ir 40 litri šķidrā ūdeņraža.

Tomēr, ir iespējams jebkurā vietā pa ceļam apstāties un atstāt cisternu šķidrā ūdeņraža, šajā gadījumā šķidrās ūdeņradis tiek ņemts pa taisno no visurgājēja degvielas tvertnes. Tāpēc, piemēram, nobraucot 100 kilometrus un atstājot tur cisternu ar 15 litriem šķidrā ūdeņraža, visurgājējam atliek vien 5 litri šķidrā ūdeņraža, ko izmantot lai pārvietotos.

Bāzē ir pieejams bezgalīgs daudzums šķidrā ūdeņraža. Vai ir iespējams tikt līdz tuvākajam krāterim?

11. Dots rombs  $ABCD$ , un  $\Gamma$  ir riņķa līnija ar centru  $A$  un rādiusu  $AB$ . Taisne  $CD$  krusto riņķa līniju  $\Gamma$  vēl punktā  $E$ . Taisnes  $BE$  un  $AC$  krustojas punktā  $P$ . Pierādīt, ka  $P$  ir  $ABD$  apvilktās riņķa līnijas centrs.