



Komandu olimpiāde matemātikā

Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-5 punktiem. Uzdevumu risināšanai dotas 3 astronomiskās stundas. Risinājumos ir jāuzrāda veiktie aprēķini un risinājuma gaita.

Uzdevumi 11. klasei

1. Dota bezgalīga skaitļu virkne (virnkes n -tais loceklis ir $\frac{1}{n}$):

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

Vai var no šīs virknes izvēlēties 2019 skaitļus tā, ka tie veido aritmētisku progresiju?

2. Ievietot kastītēs ciparus 1 – 9 katru tieši vienu reizi tā, lai izpildītos vienādība:

$$\frac{\square}{\square + \square} + \frac{\square}{\square + \square} + \frac{\square}{\square + \square} = 1$$

3. Uz tāfeles augošā secībā uzrakstīti vairāki pirmskaitļi, turklāt katri divi blakusesoši pirmskaitļi atšķiras tieši par 6. Kāds lielākais skaits pirmskaitļu varēja būt uzrakstīts uz tāfeles?
4. Dota $n \times m$ rūtiņu tabula, kur n, m - naturāli skaitļi. Katrā tabulas rūtiņā ir ierakstīts reāls skaitlis. Ar vienu gājienu atļauts izvēlēties jebkuru tabulas rindu vai kolonu un pareizināt visus tajā esošos skaitļus ar -1 . Vai atkārtoti veicot šādus gājienu iespējams panākt, ka visi tabulā ierakstītie skaitļi kļūst nenegatīvi?
5. Katra bezgalīga rūtiņu režģa rūtiņa nokrāsota vienā no 5 krāsām tā, ka novietojot 1. zīmējumā attēloto figūru jebkur plaknē, tā, lai figūras rūtiņas sakristu ar režģa rūtiņām, tajā būtu sastopamas piecas krāsas.



1. zīm.



2. zīm.

Pierādīt, ka novietojot 2. zīmējumā attēloto figūru jebkur plaknē, tā, lai figūras rūtiņas sakristu ar režģa rūtiņām, arī tajā būs sastopamas visas piecas krāsas.

6. Atrast lielāko naturālo skaitli n tādu, ka $n^2 + 9n$ ir naturāla skaitļa kvadrāts.
7. Sauksim naturālu skaitli n par *kungu skaitli*, ja var atrast naturālus skaitļus a, b, c , ka $\frac{a^2}{b \cdot c} = n$ un $a > b > c$. Atrast visus iespējamus kungu skaitļus.
8. Dots regulārs piecstūris $ABCDE$ un riņķa līnija Γ ar diametru AB . Diagonāles AC and AD krusto riņķa līniju Γ attiecīgi punktos F un G . Taisne FG krusto malu AE punktā H . Dots ka malas DE viduspunkts ir K . Pierādi, ka punkti F, H, E, K atrodas uz vienas riņķa līnijas
9. Cik daudz dažādu vērtību var pieņemt izteiksme $\left\lceil \frac{x^2}{1337} \right\rceil$, ja x ir naturāls skaitlis, turklāt $1 \leq x \leq 1337$?
Piezīme: $\lceil z \rceil$ - mazākais veselais skaitlis, kas pārsniedz z . Piemēram $\lceil 2.3 \rceil = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil 10.5 \rceil = 11$.
10. Andis attapies uz liela 8×8 šaha laukuma, kurā rindas ir numurētas no 1 līdz 8, bet kolonas ir apzīmētas ar latīņu alfabēta burtiem no A līdz H. Andis sāk savu ceļu no kreisā augšējā stūra - lauciņa A1, un vēlas nokļūt lauciņā H8. Tomēr Andis ir ļoti mānīcīgs, tāpēc ceļā ir šķēršļi: pirmkārt, Andis pārvietojas tikai par vienu lauciņu uz leju vai pa labi (bet ne pa diagonāli, lai nešķērsotu stūrus un nākamajos 7 gados varētu precēties); otrkārt, Andis vēlas izvairīties no lauciņa D4, jo tur sēž melns kaķis. Cik dažādos veidos Andis var nokļūt galamērķī?
11. Taisnstūra iekšpusē uzzīmēts cits taisnstūris, taisnstūru malas ne obligāti ir savstarpēji paralēlas. Pierādīt, ka iekšējā taisnstūra perimetrs ir mazāks nekā ārējā.