

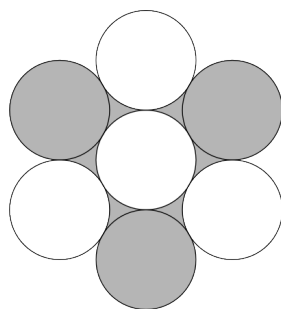


Komandu olimpiāde matemātikā

Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-5 punktiem. Uzdevumu risināšanai dotas 3 astronomiskās stundas. Risinājumos ir jāuzrāda veiktie aprēķini un risinājuma gaita.

Uzdevumi 9. klasei

1. Arbūza sastāvā ir 99% ūdens, tomēr, kad to atstāja saulē uz stundu, daļa ūdens iztvaikoja, un tagad tikai 98% arbūza ir ūdens. Kādu daļu sākotnējās masas arbūzs ir zaudējis?
2. Veikalā pārdod trīs veidu augļus: ābolus, banānus un citronus. Cik veidos var nopirkt tieši trīs augļus?
3. Atim ir ļoti daudz zaķu. Viņš izdomāja tos izskaitīt, dažādos veidos sadalot tos pa būrišiem, būrišu ir daudz vairāk nekā zaķu. Ja zaķus liek būrišos pa diviem zaķiem katrā, viens zaķis paliek pāri. Ja liek būrišos pa trim, arī viens paliek pāri. Ja liek pa četriem, pieciem vai sešiem, tad visos gadījumos viens paliek pāri. Savukārt, liekot pa septiņiem, nav zaķa, kas paliktu pāri.
Zināms, ka Atim ir mazākais iespējamais zaķu skaits, kas apmierina nosacījumus. Cik zaķu ir Atim?
4. Plaknē atzīmēti pieci sarkani punkti, kas veido izliektu piecstūri. Ārpus piecstūra atzīmēts viens zils punkts. Pierādīt, ka var atrast tādu trijstūri ar divām sarkanām un vienu zilu virsotni, ka viens no trijstūra leņķiem nepārsniedz 45 grādus.
5. Kas ir lielāks $\frac{2016}{2017} + \frac{2017}{2018} + \frac{2018}{2016}$ vai $\frac{2017}{2016} + \frac{2018}{2017} + \frac{2016}{2018}$?
6. Konfekšu kaste ir taisnstūra rūtiņu režģis, kas ir 5 rūtiņas augsts un 7 rūtiņas plats. Katrā rūtiņā ir pa vienai konfektei. Makss un Morics spēlē sekojošu spēli: Savā gājienā zēns izvēlas vienu konfekti un apēd gan to, gan visas blakusesošās konfektes (par blakusesošu sauc konfekti, kas atrodas rūtiņā, kurai ir kopīga mala ar izvēlētajās konfektes malu). Pēc tam ir otra zēna gājiens. Spēle turpinās, līdz ir apēstas visas konfektes.
Pēc spēles, protams, mamma būs ļoti dusmīga, tomēr abi zēni vienojas, ka vainu uzņemsies tas, kurš būs apēdis vairāk konfekšu. Ja Makss sāk, vai Morics var garantēt to, ka viņš apēdis mazāk konfekšu nekā Makss? Savu gājieni nav atļauts izlaist.
7. Andža gribēja uzzināt, cik alā ir melnu un cik baltu murkšķu. Alā ir ļoti tumšs, bet Andža ir pārliecināts, ka alā melno murkšķu ir mazāk par $\frac{3}{5}$ visu murkšķu. Pēkšņi alā ieskrien vēl 2 melni murkšķi. Andža atkal kārtīgi izpēta alu un nonāk pie secinājuma, ka tagad alā melno murkšķu ir vairāk nekā $\frac{2}{3}$ visu murkšķu. Cik alā bija murkšķu sākumā?
8. Dotas septiņas vienādas riņķa līnijas ar rādiusu 1 cm, kas pieskaras viena otrai kā parādīts 1. zīmējumā. Aprēķināt iekrāsotās daļas laukumu.



1. zīm.

9. Uz tāfeles uzrakstīts daļskaitlis $\frac{a}{b}$. Katrā gājienā drīkst ar daļskaitli veikt vienu no sekojošajām darbībām:

1) Apgriezt to, $\frac{a}{b} \rightarrow \frac{b}{a}$

2) Pieskaitīt 1 un pēc tam izdalīt ar 2, $\frac{a}{b} \rightarrow \frac{\frac{a}{b} + 1}{2}$

Ja sākumā uzrakstīts $\frac{5}{8}$, vai iespējams atkārtoti pielietojot darbības nonākt līdz a) $\frac{20}{23}$ b) $\frac{433}{471}$?

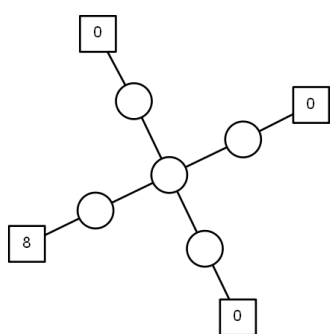
10. Pilsētā ir 71 māja. Zināms, ka no katras mājas iziet tieši viens ceļš, katrā krustojumā satiekas tieši trīs ceļi un no katras mājas var aiziet līdz jebkurai citai mājai pārvietojoties tikai pa ceļiem. Vai kādā no krustojumiem var uzbūvēt veikalu tā, lai no jebkuras mājas ejot pa ceļu varētu nokļūt līdz veikalam, šķērsojot ne vairāk kā 35 krustojumus?

11. Par *astotniecisku kvadrātu* saucim tādu naturāla skaitļa kvadrātu, kuram ir tieši astoņi cipari un tā pēdējo četrpau ciparu veidotais skaitlis ir astoņas reizes lielāks nekā pirmo četrpau ciparu veidotais skaitlis (piemēram, 10098072 apmierina pēdējo prasību, jo $8072 = 8 \cdot 1009$, bet nav naturāla skaitļa kvadrāts).

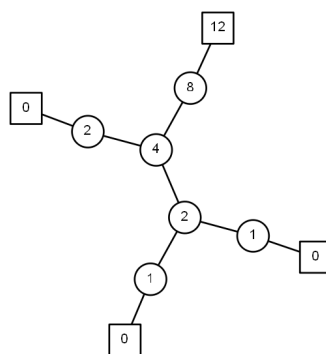
Atrast, ar pamatojumu, vienu astotniecisku kvadrātu.

12. Uz trapeces $ABCD$ garākā pamata AD atlikts punkts E tā, ka $DE = BC$. Malu AB un CD pagarinājumu krustpunkts ir F . Uz CD pagarinājuma atlikts punkts G tā, ka $CG = BE$. Pierādīt, ka $\angle BEC + \angle BFG = \angle FBG$.

13. Katrā no 2. zīmējumā esošajiem tukšajiem lauciņiem ierakstiet skaitli tā, lai katrā aplītī ierakstītais skaitlis būtu visu blakusesošu lauciņu vidējais aritmētiskais! Lauciņus sauc par blakusesošiem, ja tie ir savienoti ar taisnu līniju zīmējumā.



2. zīm.



3. zīm.

Piemēram, var pārbaudīt, ka 3. zīmējumā dotie skaitļi apmierina prasību, ka katrā aplītī ierakstītais skaitlis ir visu blakusesošu lauciņu vidējais aritmētiskais.

14. Jānim ir 99 flīzes, ar kurām viņš vēlas noklāt vannas istabas sienu. Kāds ir mazākais skaits flīžu, kādu viņam ir jānokrāso, obligāti jānokrāso vismaz viena flīze, lai būtu iespējams ar flīzēm izklāt taisnstūra laukumu tā, lai visās rindās būtu vienāds skaits nokrāsoto flīžu un visās kolonnās būtu vienāds nokrāsoto flīžu skaits? Flīžu skaitam rindā un flīžu skaitam kolonnā ne obligāti jāsakrīt. Flīze vienmēr tiek nokrāsota pilnībā, un flīzes nedrīkst pārgriezt. Taisnstūra izmērus Jānis izvēlas pats, bet taisnstūrī ir jābūt izmantotām visām 99 flīzēm.

15. Pierādīt, ka trijstūrī pret garāko malu atrodas a) īsākais augstums; b) īsākā mediāna!