

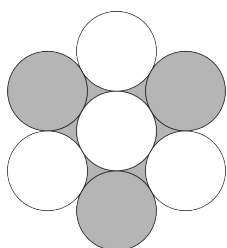


Komandu olimpiāde matemātikā

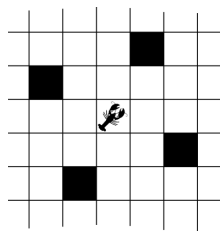
Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-5 punktiem. Uzdevumu risināšanai dotas 3 astronomiskās stundas. Risinājumos ir jāuzrāda veiktie aprēķini un risinājuma gaita.

Uzdevumi 11. klasei

1. Arbūza sastāvā ir 99% ūdens, tomēr, kad to atstāja saulē uz stundu, daļa ūdens iztvaikoja, un tagad tikai 98% arbūza ir ūdens. Kādu daļu sākotnējās masas arbūzs ir zaudējis?
2. Doti septiņas vienādas riņķa līnijas ar rādiusu 1 cm, kas pieskaras viena otrai kā parādīts 1. zīmējumā. Aprēķināt iekrāsotās daļas laukumu.



1. zīm.



2. zīm.

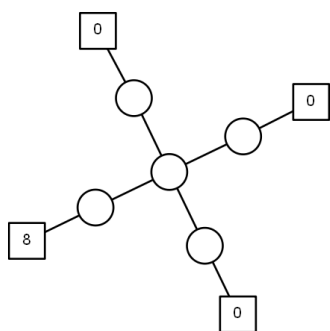
3. Ingus un Jānis pamīšus novieto jauna veida šaha figūras - "vēzīšus" - uz $n \times n$ rūtiņu šaha galdiņa. 2. zīmējumā iekrāsoti lauciņi, kurus apdraud vēzītis.

Katrā gājienā spēlētājs novieto vienu vēzīti tā, lai tas neapdraudētu nevienu citu jau novietotu vēzīti. Zaudē tas spēlētājs, kurš nevar veikt gājienu. (Vēzīši spēles gaitā nepārvietojas.)

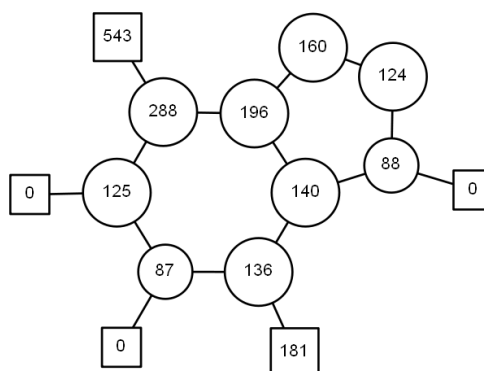
Kādiem n vienmēr uzvarēs Ingus, un kādiem - Jānis?

4. Jānim ir 99 flīzes, ar kurām viņš vēlas noklāt vannas istabas sienu. Kāds ir mazākais skaits flīžu, kādu viņam ir jānokrāso, obligāti jānokrāso vismaz viena flīze, lai būtu iespējams ar flīzēm izklāt taisnstūra laukumu tā, lai visās rindās būtu vienāds skaits nokrāsoto flīžu un visās kolonnās būtu vienāds nokrāsoto flīžu skaits? Flīžu skaitam rindā un flīžu skaitam kolonnā ne obligāti jāsakrīt. Flīze vienmēr tiek nokrāsota pilnībā, un flīzes nedrīkst pārgriezt. Taisnstūra izmērus Jānis izvēlas pats, bet taisnstūrī ir jābūt izmantotām visām 99 flīzēm.
5. Par *maizīgu* saucim reālu pozitīvu skaitļu kopu ar ne mazāk kā diviem elementiem, kurai izpildās nosacījums:
Ja kopai pieder skaitļi a un b , kur $a < b$, tad kopai pieder arī skaitlis $\frac{a}{b} + 1$. Piemēram, visu reālo pozitīvo skaitļu, kas mazāki par 2, kopa ir maizīga, turklāt šī kopa ir arī bezgalīga, jo satur bezgalīgi daudz skaitļu.
 - a) Atrast vismaz vienu galīgu (satur galīgu skaitu skaitļu) maizīgu kopu.
 - b) Pierādīt, ka ir bezgalīgi daudz galīgu maizīgu kopu.
6. Dots regulārs $4k$ stūris (k ir naturāls skaitlis), kas sadalīts paralelogramos. Pierādīt, ka ne mazāk kā k paralelogrami šajā dalījumā ir taisnstūri.
7. Kāds ir garākais iespējamais derīgas bums ķēdes garums, kādu var iegūt, spēlējot spēli **Bums** (skatīt spēles noteikumus pielikumā)?

8. $\triangle ABC$ ievilktais riņķa līnijas centru apzīmēsim ar R . Pagarinot trijstūra ABC malas BC un AC , iespējams uzkonstruēt riņķa līniju, kas ārēji pieskaras malai AB un pārējo malu pagarinājumiem. Sauksim šīs riņķa līnijas centru par P . Pierādīt, ka PR viduspunkts pieder trijstūra ABC apvilktajai riņķa līnijai.
9. a) Katrā no 3. zīmējumā esošajiem tukšajiem lauciņiem ierakstiet skaitli tā, lai katrā aplītī ierakstītais skaitlis būtu visu blakusesošo lauciņu vidējais aritmētiskais. Lauciņus sauc par blakusesošiem, ja tie ir savienoti ar taisnu līniju zīmējumā.



3. zīm.



4. zīm.

Piemēram, var pārbaudīt, ka 4. zīmējumā dotie skaitļi apmierina prasību, ka katrā aplītī ierakstītais skaitlis ir visu blakusesošo lauciņu vidējais aritmētiskais.

- b) Vai eksistē vēl kāda skaitļu kombinācija, kuru var ierakstīt 4. zīmējuma aplīšos tā, lai tiktu ievērots vidējā aritmētiskā nosacījums? Kvadrātiņos ierakstītos skaitļus mainīt nedrīkst.

10. Veikalā pārdod četru veidu augļus: ābolus, banānus, citronus un mandarīnus. Cik veidos var nopirkt tieši četrus augļus (ne obligāti dažādus)?
11. Atrast visus tādus naturālus skaitļus $n \geq 3$, ka $n^4 - 5$ dalās ar $n^2 - 5$.
12. Pierādīt, ka trijstūrī pret garāko malu atrodas a) īsākais augstums; b) īsākā mediāna!
13. Dots polinoms $P(x)$ ar veseliem koeficientiem. Zināms, ka vienādojuma $P(P(x)) = x$ vienīgie atrisinājumi veselos skaitļos ir $x = 0$ un $x = 1$. Atrast visas iespējamās $P(1)$ vērtības!
14. Saskaitīšanas ķēde ir n skaitļu virkne a_1, a_2, \dots, a_n , kurā $a_1 = 1$ un jebkuram citam virknes loceklim a_i eksistē divi tādi virknes locekļi a_j un a_k (iespējams vienādi), ka $j \leq k < i$ un $a_i = a_j + a_k$.
Piemēram, $(1, 2, 3, 5, 7, 10)$ ir saskaitīšanas ķēde, jo $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $5 = 2 + 3$, $7 = 2 + 5$, $10 = 3 + 7$.
 $(1, 2, 3, 5, 10)$ ir cita saskaitīšanas ķēde, kuras pēdējais loceklis arī ir 10, turklāt tā ir īsāka.
Dots skaitlis $k < 2^t$, pierādiet, ka eksistē tāda saskaitīšanas ķēde a_1, a_2, \dots, a_n , ka $a_n = k$ un $n \leq 2 \cdot t$.
15. Uz trijstūra ABC malas AB atlikts punkts D , un uz malas BC atlikts punkts E tā, ka DE paralēls AC . Taišņu CD un AE krustpunktu apzīmēsim ar T .
Pierādīt, ka taisne BT dala nogriežņus DE un AC uz pusēm (iet cauri viduspunktiem).

Pielikums

Spēles **Bums** apraksts:

Sauksim skaitli par *cipariski saliktu*, ja tas nav pirmskaitlis un tā ciparu summa nav pirmskaitlis.

(Pirmskaitlis ir skaitlis, kas dalās tieši ar diviem skaitļiem: ar sevi un ar 1. Piemēram, 5, 13, 29 ir pirmskaitļi, bet, piemēram, $4 = 2 \cdot 2 = 1 \cdot 4$, $20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 10$, $111 = 3 \cdot 37 = 1 \cdot 111$ nav. Skaitlis 1 **nav** pirmskaitlis, jo dalās tikai ar vienu skaitli, nevis diviem)

Sastājies aplī ar 3 – 7 draugiem un sagatavojies aizraujošai spēlei!

Spēle sākas, kad kāds nosauc cipariski saliktu skaitli, un gājiens pāriet pie nākošā spēlētāja pulksteņa rādītāja virzienā.

Nosauktais skaitlis kļūst par “spēles skaitli”, un katru gājienu tā vērtība palielinās par 1 (neatkarīgi no tā, ko pateica iepriekšējais spēlētājs).

Gājieni norisinās pa apli, un mērķis ir saprast pēc iespējas ātrāk, vai tagadējais spēles skaitlis ir cipariski salikts, vai nē.

Kad pienāk tava kārtā:

- a) Ja spēles skaitlis ir cipariski salikts, tad tev tas ir skaļi jānosauc.
- b) Ja tas nav cipariski salikts, tad ir jāsaka **bums!**
- c) Ja tu vilcinies par ilgu un nevari izdomāt vai pasaki nepareizi, tad tev ir jāiziet no apļa, un spēle sākas no jauna ar atlikušajiem spēlētājiem.

Par *bums ķēdi* sauksim nepārtrauktu virkni ar **bums!** izsauieniem no spēlētājiem. Derīga bums ķēde ir tāda, kuras gaitā neviens no spēlētājiem nav kļūdījies ar savu **bums!** izsauicienu. Par bums ķēdes garumu sauksim kopējo **bums!** izsauicienu skaitu ķēdē.

Piemērs spēlei starp trim spēlētājiem: Āro (A), Karelu (K) un Mēriju (M):

1. Āro pasaka 46 (tas ir cipariski salikts),
2. Karels iesaucas **bums!** (jo 47 ir pirmskaitlis),
3. Mērija saka 48 (tas ir cipariski salikts),
4. A: **bums!** (49 ciparu summa ir pirmskaitlis),
5. K: **bums!** (50 ciparu summa ir pirmskaitlis),
6. M: 51 (cipariski salikts),
7. A: **bums!** (52 ciparu summa ir pirmskaitlis)
8. K: **bums!** (53 ir pirmskaitlis)
9. M: 54 (tas ir cipariski salikts)
10. A: 55 (tas ir cipariski salikts)
11. K: 56 (kļūda, 56 ciparu summa ir pirmskaitlis, tādēļ 56 nav cipariski salikts un bija jāsaka **bums!**)
12. Spēle sākas no jauna

Šajā spēlē garākās derīgās bums ķēdes garums ir 2, un ir divas derīgas bums ķēdes šādā garumā, viena, kad spēles skaitlis ir 49 un 50, otra, kad spēles skaitlis ir 52 un 53.