Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

9. klases atrisinājumi

1. a) $\frac{2}{7}$, b) $\frac{2}{29}$, c) $\frac{2}{2n+1}$. (c) atbilde iegūta $\frac{1}{n}$ un $\frac{1}{n+1}$ pārveidojot par $\frac{2}{2n}$ un $\frac{2}{2n+2}$.

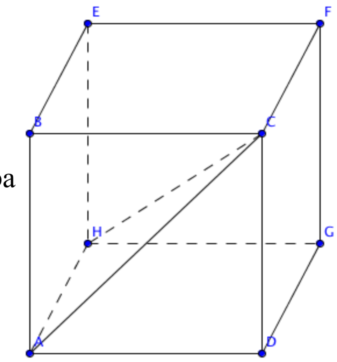
2. Apskatīsim punktu C. No tā var novilkt nogriežņus uz

a) B, D, F, kas sakrīt ar kuba malām, tātad ir vienādi,

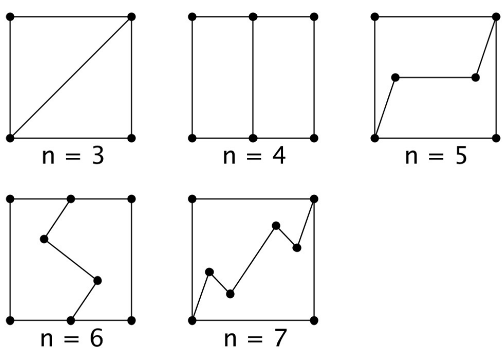
b) A, E, G, kas sakrīt ar kuba skaldnes diagonāli, tātad ir vienādi,

c) H, kas veido kvadrāta diagonāli.

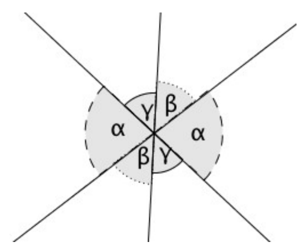
Pārējiem punktiem situācija būs tāda pati (var novilkt trīs nogriežņus, kas sakrīt ar malām, trīs, kas sakrīt ar kuba skaldnes diagonālēm, un vienu kuba diagonāli). Tātad var novilkt trīs dažāda garuma nogriežņus, kuru galapunkti atrodas kuba virsotnēs.



3.

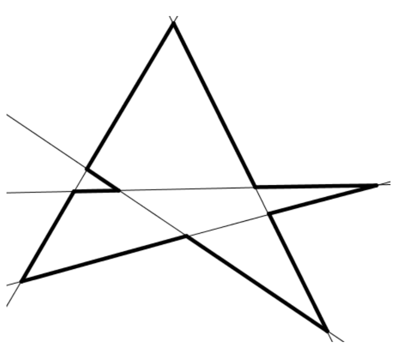


4. Krustojoties trīs taisnēm, izveidojas trīs dažāda lieluma leņķi, kuru summa ir $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Pieņemsim pretējo – neviens no šiem leņķiem nepārsniedz 60°. Tādā gadījumā $\alpha+\beta+\gamma<180°$. Esam ieguvuši pretrunu, tātad vismaz viens no leņķiem ir vismaz 60° liels.

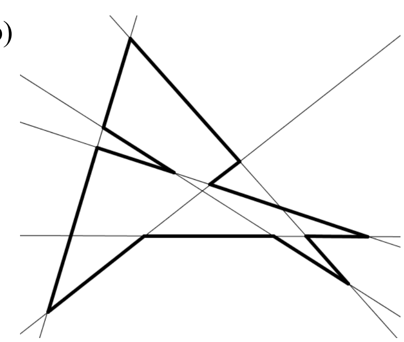


5. Andjikam atrodoties a-tajā aplī, sacensību līderis tam bija b apļus priekšā. Tātad līderis atradās (a+b)-tajā aplī. Skaidrs, ka līderis nevarēja būt nobraucis vairāk apļus, kā paredzēts sacensībās, tādēļ $a+b\leq 11$ un maksimālā a+b vērtība ir 11.

6. a)



b)



7. Brīdī, kad finišē Ašais, viņš ir veicis 1000 m un Brašais tajā pašā laikā periodā (t_1) ir veicis 800 m, tādēļ $V_A = \frac{1000}{t_1}$ (V_A, V_B, V_C - attiecīgo zaķu skriešanas ātrumi), $V_B = \frac{800}{t_1}$ un $\frac{V_A}{V_B} = \frac{1000}{800}$.

Analogi, zinot, ka laikā t_2 Brašais noskrien visu distanci un Cietušais ir noskrējis tikai 700 m, iegūstam, ka $\frac{V_B}{V_C} = \frac{1000}{700}$. Veicam pārveidojumus $\frac{V_A}{V_B} \cdot \frac{V_B}{V_C} = \frac{V_A}{V_C} = \frac{1000 \cdot 1000}{800 \cdot 700} = \frac{1000}{560}$. No šejienes var secināt, ka brīdi t_1 , kad Ašais noskrien 1000 m un finišē, Cietušais ir noskrējis 560 m un atrodas 440 m attālumā no finiša.

8. Ja $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_k$ ir visi skaitļa n dalītāji sakārtoti augošā secībā, tad $d_1 = \frac{n}{d_k}$, $d_2 = \frac{n}{d_{k-1}}$, ..., $d_k = \frac{n}{d_1}$. Tātad dotais vienādojums ir spēkā visiem n.

9. Izmantosim Vjeta teorēmu:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 + x_2 = q \end{cases}$$

Tā kā dots, ka saknes sakrīt ar p un q vērtībām, x_1 un x_2 varam aizvietot ar attiecīgi p un q.
Iegūstam:

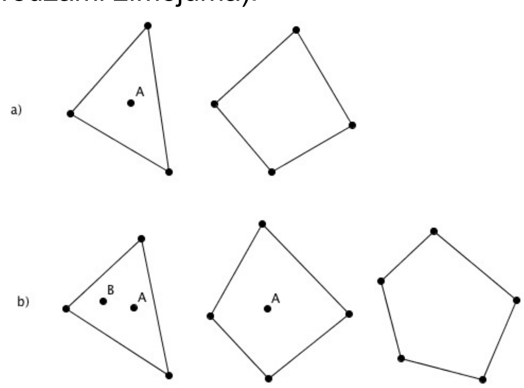
$$\begin{cases} p + q = -p \\ p \cdot q = q \end{cases}$$

No otrā vienādojuma varam secināt, ka vai nu $p = 1$ (līdz ar to $q = q$), vai $q = 0$ ($p \cdot 0 = 0$). Līdz ar to iegūstam divus atrisinājumus:

$$\begin{cases} p = 1 \\ q = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0 \end{cases}$$

10. Savienojam punktus tā, lai izveidotu lielāko iespējamo daudzstūri (iespējamie izkārtojumi redzami zīmējumā).



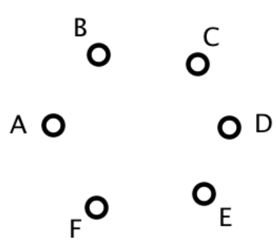
a) 1. gadījumā veidojas trīs leņķi ar virsotni punktā A, kas savā starpā nepārklājas (jebkura šo leņķu summa būs lielāka par leņķiem, kas to veido). Mazākā leņķa maksimālā vērtība ir gadījumā, kad visi trīs leņķi ir vienādi, tātad 120°. Trijstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir vienādmalu trijstūra gadījumā, tātad 60°. Taču katru no šiem leņķiem dala stars, kas iet no virsotnes caur punktu A. Tātad 1. gadījumā mazāka leņķa maksimālā vērtība ir 30°. Otrajā gadījumā četrstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir gadījumā, kad visi četrstūra leņķi ir vienādi, t.i. 90°. Katru no tiem dala stars, kas iet no virsotnes uz pretēju virsotni, tātad mazākā leņķa maksimālā vērtība 2. gadījumā ir 45°. Tātad a piemērā mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 45°.

b) 1. gadījumā ir četri leņķi ar virsotni punktā A, kas savā starpā nepārklājas, un četri – ar virsotni punktā B. To mazākā leņķa maksimālā vērtība ir gadījumā, kad visi četri leņķi ir vienādi, tātad 90°. Tāpat arī otrajā gadījumā.

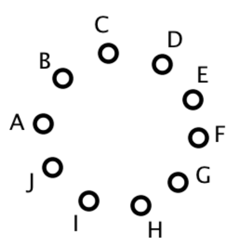
1. gadījumā trijstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 60°, taču to dala divi stari, tātad mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 20°. 2. gadījumā četrstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 90°, taču arī to dala divi stari, tātad mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 30°. 3. gadījumā piecstūra mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 108°, to dala divi stari, tātad b piemērā mazākā leņķa maksimālā vērtība ir 108° : 3 = 36°.

11. a) neatkarīgi no norādītās monētas, apgriezt var tikai tai diametrāli pretējo monētu. Tātad, ja kāda monēta ir apgriezta, tai diametrāli pretējo monētu nevar apgriezt. Tātad neapgrieztas paliks vismaz trīs monētas. Apgriezt trīs monētas var, piemēram, norādot uz A, B, C un attiecīgi apgriežot D, E, F. Šajā gadījumā Zane nevar uzvarēt.

b) Zane var norādīt uz A un apgriezt D (A→D), H→A, E→H, B→E, I→B, F→I, C→F, J→C, G→J. Palikusi neapgriezta tikai viena monēta, tātad Zane var dabūt tēju.



a)



b)

12. Pieņemsim, ka nav iespējams no svariem noņemt 3 atsvarus tā, lai svari atkal būtu līdzsvarā. Kādā no svaru kausiem būs atsvars ar svaru 1 g Skaidrs, ka uz kausa būs vēl kāds atsvars, pieņemsim, ka vieglākais no tiem ir ar svaru z grami. Lai nevarētu noņemt 3 atsvarus, saglabājot līdzsvaru starp kausiem, šajā kausā jāatrodas arī atsvaram (z+1) g. Ja tas atrastos uz otra kausa, tad no pirmā kausa varētu noņemt 1 g un z g, bet no otrā (z+1) g, svari arvien paliktu līdzsvarā. Analogi mēs varam secināt par (z+2) g, (z+3) g, ..., n g atrašanos uz pirmā kausa. Saprotami, ja z = 2 g, tad uz pirmā kausa atradīsies visi atsvari, kas nav iespējams. Tamdēļ atsvars 2 g atrodas uz otra kausa. Zinot, ka uz pirmā kausā stāv 1 g, z g, (z+1) g, ..., n g, secinām, ka uz otra atradīsies pārējie atsvari – 2 g, 3 g, ..., (z-2) g, (z-1) g. Ja $z \le 5$, tad otrais kauss acīmredzot būs vieglāks par pirmo kausu, jo 2+3+4<1+5+6+... Tātad (z-2) g un 2 g atsvari ir divi dažādi atsvari. Noņemot šos atsvarus no otrā kausa un z g no pirmā kausa, svari paliks līdzsvarā, kas ir pretrunā ar mūsu sākotnējo pieņēmumu. Tātad var noņemt 3 atsvarus, atstājot abas puses līdzsvarā.

13. Varam pārveidot doto nevienādību, atverot iekavas:

$$a^2+b^2+c^2+2\mathrm{ab}+2\mathrm{ac}+2\mathrm{bc}\le 3\mathrm{a}^2+3\mathrm{b}^2+3\mathrm{c}^2$$

Turpinām pārveidot

$$2\mathrm{a}^2+2\mathrm{b}^2+2\mathrm{c}^2-2\mathrm{ab}-2\mathrm{ac}-2\mathrm{bc}\ge 0$$
$$a^2-2\mathrm{ab}+b^2+a^2-2\mathrm{ac}+c^2+b^2-2\mathrm{bc}+c^2\ge 0$$
$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2\ge 0$$

Šī nevienādība ir spēkā, jo jebkura skaitļa kvadrāts ir nenegatīvs.

14. Pieņemsim, ka Mārtiņš var uzvarēt un uz tāfeles kādā brīdi atradīsies skaitlis, kurš, dalot ar 7, nedos atlikumu a. Tad, tā kā šajā brīdī uz tāfeles ir uzrakstīti 6 skaitļi, kuri dod ne vairāk kā 5 dažādus atlikumus (visi iespējamie skaitļa 7 atlikumi izņemot a un 0), divi no skaitļiem dos vienādus atlikumus, tātad to starpība dalīsies ar 7. Pieņemsim, ka šie skaitļi ir bx un by, kur b ir pēdējais skaitlis, ar kuru tikai reizināti visi uz tāfeles esošie skaitļi. Attiecīgi $bx-by$ un $b(x-y)$ dalīsies ar p. Tā kā b nedalās ar 7 un tam nav neviena kopīga dalītāja ar 7, tad $(x-y)$ dalās ar 7, līdz ar ko x un y dod vienādus atlikumus, dalot ar 7. Līdzīgi spriežot, mēs varam secināt, ka arī virknē pirms x un y virknes bija divi skaitļi, kas dod vienādus atlikumus, un tā, soli pa solim veicot secinājums, varam konstatēt, ka arī sākotnējā uz tāfeles uzrakstīto skaitļu virknē bija divi skaitļi, kas dod vienādus atlikumus. Tas nevar būt, jo sākotnējā virknē visi skaitļi bija dažādi un mazāki par 7, tādēļ Mārtiņš nevar uzvarēt šo spēli.

15. Atverot abās nevienādības pusēs iekavas, iegūstam

$$a^3+abc+a^2b+b^2c<2\mathrm{a}^3+2\mathrm{b}^2c\ ,$$

ko pārveidojam par

$$a^3-abc+b^2c-a^2b>0$$
$$a(a^2-bc)-b(a^2-bc)>0$$
$$(a^2-bc)(a-b)>0$$

No dotā $a>b\Rightarrow a-b>0$ un $a>b>0, a>c>0\Rightarrow a^2>bc\Rightarrow a^2-bc>0$, tādēļ iegūtā nevienādība $(a^2-bc)(a-b)>0$ arī ir spēkā.

* Uzdevumā nebija precīzi norādīts, ka $a>b>c>0$.