





Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

Katru uzdevumu vērtē ar $0 \div 5$ punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas. Rakstot atrisinājumus, uzrādiet risinājuma gaitu!

Uzdevumi 10. klasei

1. Trapeces ABCD diagonāles krustojas punktā O. Pierādi, ka trijstūru ABO un COD laukumi ir vienādi.
2. Pierādi, ka kvadrātu var sagriezt divos vienādos n-stūros, kur $3 \leq n \leq 7$.

3. Vai no 5 šādām figūriņām  un 4 šādām figūriņām  ir iespējams izveidot taisnstūri?

4. Trīs zaķi – Ašais, Brašais un Cietušais – joņo 1 km distanci. Kad Ašais finišē, Brašais ir 200 metrus aiz viņa. Savukārt, kad finišē Brašais, Cietušais ir 300 m aiz viņa. Cik metrus no finiša bija Cietušais brīdī, kad finišējā Ašais? (Visi zaķi distancē saglabā vienmērīgu ātrumu.)

5. Dots naturāls skaitlis n, kura visi dalītāji attiecīgi ir $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k$. Kādiem n ir spēkā

$$\text{vienādība } d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_k = \frac{n}{d_1} + \frac{n}{d_2} + \frac{n}{d_3} + \dots + \frac{n}{d_k} ?$$

6. Dots vienādojums $x^2 + px + q = 0$. Atrast visas p un q vērtības, kuras sakrīt ar atbilstošā vienādojuma saknēm.

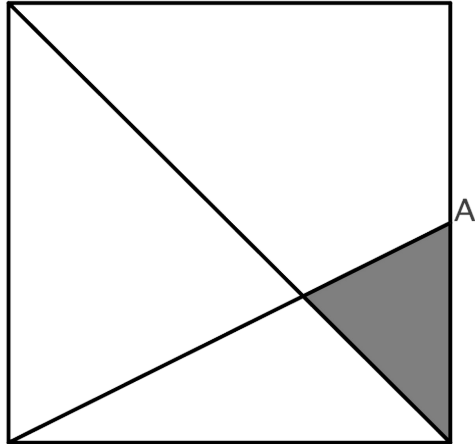
7. Dots trijstūris ar malām a, b, c . Pierādīt, ka $2abc > a^3 - ab^2 - ac^2$.

8. Plaknē atzīmēti a) 4 punkti, b) 5 punkti, no kuriem nevieni trīs nav uz vienas taisnes. Kāda ir lielākā iespējamā vērtība mazākajam no leņķiem, ko veido jebkuri trīs no šiem punktiem?

9. Mārtiņš saviem skolēniem iedeva testu ar 7 jautājumiem, katrā jautājumā 3 atbilžu varianti, no kuriem tieši 1 ir pareizs. Mārtiņš izlaboja testus un katram pierakstīja, cik ir pareizas atbildes, bet pats pazaudēja atbilžu lapu. Vai Mārtiņš no skolēnu atbildēm un rezultātiem var noskaidrot, kuras ir pareizas atbildes (atbildes sakārtotas jautājumu secībā)?

| Skolēna Nr. | Skolēnu atbildes | Pareizas |
|-------------|------------------|----------|
| 1 | c b b a c c c | 2 |
| 2 | b a b a b b c | 1 |
| 3 | c b c c b b c | 1 |
| 4 | a c a b c a a | 2 |
| 5 | a b b b c c c | 3 |
| 6 | b a b b a c b | 4 |
| 7 | b b c c a b c | 2 |
| 8 | a c c b a c a | 4 |

10. Pierādīt: Ja naturāliem skaitļiem b un c eksistē kopīgs dalītājs k , tad virknes $b; 2b; 3b \dots (c-1)b; cb$ locekļus var sadalīt k daļās tā, ka katru divu daļu locekļu summu starpība dalās ar c un nav nulle.
11. Kāda daļa no dotā kvadrāta (A - malas viduspunkts) ir iekrāsota?



12. Uz tāfeles uzrakstīti skaitļi no 1 līdz $(p-1)$, kur p ir patvaļīgs pirmskaitlis. Mārtiņš un Marta spēlē spēli, kur viņi viens pēc otra (Mārtiņš sāk pirmais) katra uz tāfeles uzrakstītā skaitļa vietā uzraksta tā reizinājumu ar jebkuru sevis izvēlētu naturālu skaitli, kurš nedalās ar p . Mārtiņš uzvarēs tad, ja kādā brīdī uz tāfeles nebūs neviena skaitļa, kuru, dalot ar p , atlikumā paliks a , kur veselu skaitli a ($0 < a < p$) viņš pats pirms spēles ir izvēlējis. Vai Mārtiņš var uzvarēt?
13. Dots, ka $a > b > c > d > e > f$, kur a, b, c, d, e, f ir reāli skaitļi. Pierādīt $(a+b+c)(d+e+f) < 3(ad+be+cf)$.
14. Telpā ir 2^n neieslēgtas spuldzītes. Ārpus telpas ir 2^n slēdži – katrs no tiem nomaina katrs savas spuldzītes stāvokli. Esot ārpus telpas, spuldzītes nav iespējams redzēt, bet drīkst ieiet telpā un apskatīties spuldzīšu stāvokli. Kāds ir mazākais iespējamais reižu skaits, kurā jāapskatās spuldzīšu stāvoklis, lai varētu precīzi noteikt, kuri slēdži ieslēdz kuras spuldzītes?
15. Orbitreka firma no bankas plāno aizņemties naudu, kas pēc tam 10 gadu laikā būtu jāatmaksā. Firma katru gadu procentu un parāda atmaksai plāno veltīt 12 950 Ls. Kāds ir maksimālais naudas apjoms P , ko Orbitreka firma var aizņemties, ja no naudas līdzekļiem 12 950 Ls vispirms jāsamaksā procentu maksājums 5% no atlikušās summas, un tad par atlikušo naudu tiek veikta daļēja pamatsummas atmaksa?