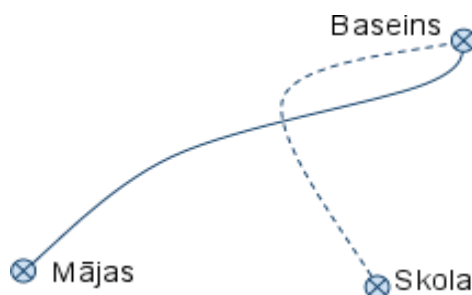


Komandu olimpiāde „Atvērtā Kopa”

Katru uzdevumu vērtē ar $0 \div 5$ punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas. Rakstot atrisinājumus, uzrādiet risinājuma gaitu!

Uzdevumi 8. klasei

1. Normālā cena sastāv no pamatcenas plus 21% no pamatcenas (pievienotās vērtības nodoklis - PVN). Veikals JUSK piedāvā akciju “Atceļam PVN!”, piešķirot 21% atlaidi normālajai cenai. Vai akcijas cena ir vienāda ar pamatcenu? Ja nē, kādai jābūt atlaidei no normālās cenas, lai pamatcena sakristu ar akcijas cenu?
2. Andžejs iedomājās skaitli un kāpināja to kvadrātā. Kāds var būt šī kvadrāta pēdējais cipars?
3. Edgars uz metamā kauliņa 6 skaldnēm uzrakstīja skaitļus 14, 6, 2, 18, 22, 10. Zane uz sava metamā kauliņa drīkst uzrakstīt skaitļus, kas ir par 1, 2 vai 3 mazāki vai lielāki kā jebkurš no Edgara uzrakstītajiem skaitļiem. Edgars Zanei apsoltāja, ja, metot abus kauliņus, uzņemto skaitļu summa uz tiem būs 24, viņš viņai uzdāvinās ceļojumu uz Havaju salām. Vai Zane skaitļus uz sava kauliņa var uzrakstīt tā, lai viņai būtu iespēja tikt pie ceļojuma?
4. Doti veseli skaitļi a un b un zināms, ka $2a + 3b$ un $4a + 5b$ dalās ar 7. Pierādi, ka gan a , gan b dalās ar 7.
5. Pierādi, ka izliektā četrstūrī $ABCD$ izpildās nevienādība $AC + BD > AB + CD$.
6. Dots 6 pēc ārēja izskata vienādas monētas un sviru svāri bez atsvariem. Monētas ir vienādā svarā, izņemot vienu, kura izgatavota no cita materiāla (nav zināms vai no vieglāka, vai smagāka). Uzrādiet 2 būtiski dažādus veidus, kā ar 3 svēršanām var atrast atšķirīgo monētu.
7. Nosauc visus skaitļus no 1 līdz 100, kuriem izpildās šāda īpašība: skaitli, dalot ar 3, atlikums ir 2, bet, dalot ar 5, atlikums ir 4. Cik tādu skaitļu ir no 1 līdz 1000?
8. Mindaugs no mājām uz baseinu iet pa ceļu, kas kartē uzzīmēts ar nepārtrauktu līniju, bet no skolas uz baseinu - pa ceļu, kurš iezīmēts ar raustītu līniju. Turklāt viņš apgalvo, ka katrs no ceļiem ir īsākais iespējamais. Kādā gadījumā viņam var būt taisnība?



9. Pierādīt, ka pozitīviem reāliem x un y ir spēkā $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.
10. 200 cilvēki – 105 sievietes un 95 vīrieši tiek sadalīti nejauši izvēlētā kārtībā divās rindās – katrā pa 100 cilvēkiem. Katri 2 pretī stāvošie cilvēki (kopā 100 šādi pāri) sarokojās. Pierādīt, ka „sieviete-sieviete” rokasspiedienu bija par 5 vairāk nekā „vīrietis-vīrietis”.
11. Katru sestdienu 18 no 23 Orbitrekiem ir jāierodas uz apaļā galda sanāksmi. Tā kā Orbitreki ir karstasinīgi, tad, blakus apsēžoties 4 Orbitrekiem, noteikti sāksies ķīviņš. Pierādiet, ka nav pagājusi ne sestdiena bez savstarpēja Orbitreku ķīviņa, ja zināms, ka pie galda ir 23 sēdvietas!
12. Hokeja čempionātā piedalās 27 komandas. Tās ir sadalītas 3 vienādi lielās konferencēs. Čempionāta nolikumā ir noteikts, ka katrai komandai ar savas konferences komandām ir jāizspēlē 16 spēles, bet ar pārējo konferenču komandām kopā jāizspēlē 9 spēles. Pierādiet, ka nolikums ir kļūdains, un hokeja komandām vajadzētu boikotēt šo čempionātu!
13. Uz 10×10 laukuma katra lauciņa ir uzlikta spuldzīte. Sākotnēji ieslēgta ir tikai viena spuldzīte stūra lauciņā. Ar katru gājienu ir atļauts izvēlēties jebkuru laukuma kolonnu vai rindiņu un nomainīt visu tajā esošu spuldzīšu stāvokli (no ieslēgta uz izslēgtu, no izslēgta uz ieslēgtu). Vai, vairākkārt izdarot gājienu, var panākt, ka ieslēgtā stāvoklī ir tieši puse no visām spuldzītēm?
14. Jānis un Līga nopirka taisnstūra formas šokolādi, kas sastāv no 6×8 vienādiem šokolādes kubiciņiem. Jānis izdomāja spēli. Katrs spēlētājs (viens pēc otra) drīkst sadalīt šokolādi, laužot to pa taisnu līniju un tikai pa līniju, kas atdala šokolādes kubiciņus vienu no otra. Tā, piemēram, Jānis savā gājienā var sadalīt šokolādi divos gabalos – 2×6 un 6×6 izmērā. Līga savā gājienā tagad var, piemēram, 6×6 gabalu sadalīt 1×6 un 5×6 gabalos, vai, piemēram, sadalīt 2×6 gabalu 1×2 un 5×2 gabalos. Spēlētājs, kas var izdarīt pēdējo gājienu, uzvar un drīkst apēst visu šokolādi. Spēli sāk Jānis.
- Kurš spēlētājs uzvarēs un iegūs šokolādi pareizi spēlējot?
 - Kurš spēlētājs uzvarēs un iegūs šokolādi, ja sākotnējais šokolādes izmērs ir 7×5 gabaliņi?
15. iDžejs, garlaicības māks, izgudroja savdabīgu teleportu. iDžejs to var izmantot no jebkuras vietas un tas pārvieto viņu uz diametrāli pretējo punktu, t.i., sākumpunkts, teleports un galapunkts atrodas uz vienas taisnes (tā var nebūt paralēla rūtiņu tīkla līnijām) un sākumpunkts un beigu punkts atrodas vienādos attālumos no teleporta. iDžejs ir izgatavojis divus šādus teleportus. Viens no tiem ir novietots Rīgā, bet otrs - Jūrmalā (skatīt karti uz nākamās lapas). Vai iDžejs var tikt no Rīgas uz Cēsīm, izmantojot tikai šos teleportus? Starp kurām pilsētām iDžejs varētu veikt ceļojumus, izmantojot katru no šiem teleportiem tieši vienu reizi?

