

Komandu olimpiāde „Asie Cipari”



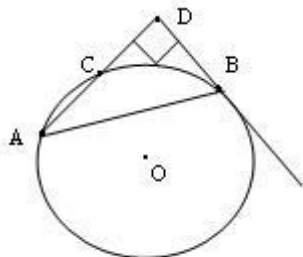
Katru uzdevumu vērtē ar $0 \div 5$ punktiem. Risināšanas laiks - 3 astronomiskās stundas

Uzdevumi 10. klasei

1. Par maģisku kvadrātu sauc tādu 4×4 rūtiņu kvadrātu, kurā ierakstīti skaitļi no 1 līdz 16 (katrs skaitlis tieši vienu reizi) tā, ka katrā rindiņā, kolonnā un abās garākajās diagonālēs skaitļu summas ir vienādas. Atrodiet kaut vienu maģisko kvadrātu!
2. Edgars ceļu uz skolu veic ar kājām un ceļā pavada 30 minūtes. Tā kā šoreiz Edgars kavēja, tad, lai paspētu tieši laikā, viņam trešdaļu no attāluma vajadzēja nobraukt ar riteni, trešdaļu ar autobusu, bet atlikušo daļu noiet ar kājām. Ar riteni Edgars brauc divreiz ātrāk nekā iet, bet piecreiz lēnāk nekā brauc autobuss. Cik minūtes Edgars būtu nokavējis, ja viņš kā parasti visu ceļu būtu nogājis ar kājām?
3. Lai atvērtu Harija Zaļo podu, ir jāuzmin 12 ciparu kods. Ir zināms, ka pirmie 6 cipari no koda ir Harija dzimšanas datums, atlikušie 6 cipari viņa mammas dzimšanas datums (abu datumu formāts ir *ddmmgg*), kā arī, katru divu blakus esošu koda ciparu summa dalās ar 4. Cik mazākais reižu būtu jāmin kods, lai atvērtu Zaļo podu?
4. Alnim bija 3 kastītes ar bumbiņām (kastīšu saturu nav iespējams redzēt). Kastītē, uz kuras bija uzraksts MM, bija 2 melnas bumbiņas, MB- melna un balta bumbiņa, BB- 2 baltās bumbiņas. Ļaunais Ūdrs uzrakstus samainīja tā, ka nevienai kastītei nepalika iepriekšējais uzraksts. Alnis drīkst no kastītēm ņemt ārā pa vienai bumbiņai un paskatīties, kāda tai krāsa. Kāds ir mazākais bumbiņu skaits, kas Alnim jāizņem, lai uzzinātu, kādas bumbiņas tagad ir katrā kastītē?
5. Mūsdienu pilī ir 2008 stāvi un pagrabstāvs (0. stāvs). Vēl pilī ir 100 lifti, kuriem visiem ir ieejas pagrabstāvā. 1. lifts ir salūzis, bet 2. lifts ved tikai uz katru otro stāvu, sākot no 0. stāva, 3. lifts uz katru trešo stāvu, sākot no 0. stāva ... 100. lifts uz katru simto stāvu, sākot no 0. stāva. Vai princis var apmeklēt
 - a) visas princeses vienu pēc otras, kuras attiecīgi dzīvo 14., 204., 334., 341., 476., 620. un 1295. stāvā, izmantojot 7 dažādus liftus? Princis drīkst apmeklēt princeses jebkādā secībā.
 - b) karalieni, kura dzīvo 617. stāvā?
6. Pierādīt, ka
$$\frac{ab(a-2)+bc(b-2)+ca(c-2)}{2} \geq a(c-2)+b(a-2)+c(b-2),$$
 ja $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.
7. Vēstures skolotājam jāsadala vēstures eksāmena dalībnieki vismaz 3 vienlīdz lielās grupās. Sadalot dalībniekus 3 vienādās grupās, 2 dalībnieki palika nekur neiekļauti, 4 grupās 2 dalībnieki palika pāri, 5 grupās 4 dalībnieki. Cik grupās galu galā skolotājam būtu jāsadala eksaminējamie skolēni, lai visi skolēni tiktu iekļauti un visas grupas būtu vienādas, ja zināms, ka eksāmenā nepiedalās vairāk par 73 skolēniem?
8. Dotas desmit monētu kaudzes, kur katrā ir 2008 monētas. Deviņās no kaudzēm monētu svars ir 1 grams, bet vienā kaudzē (nav zināms, kurā) 1,1 grams. Doti

elektroniskie svāri, uz kuriem uzliekot jebkuru skaitu monētu, tas parādīs to kopējo svaru. Kāds ir minimālais nepieciešamais svēršanu skaits, lai noteiktu, kurā kaudzē monētu svārs ir 1,1 grams? Uzrādiet arī, kādas svēršanas jāveic, lai atrast 1,1 gramu smagās monētas!

9. Riņķī ar centru punktā O novilkta horda AB. Caur punktu B novilkta pieskare, bet caur punktu A novilkta taisne, kas ir perpendikulāra pieskarei un krusto riņķa līniju punktā C (skat. zīm.1). Pierādiet, ka taisne AB ir trijstūra OAC bisektrise.



10. Dots k – naturāls skaitlis. Pierādiet:

a) $2^8 + 3 \cdot 2^7 + 3^2 \cdot 2^6 + 3^3 \cdot 2^5 + 3^4 \cdot 2^4 + 3^5 \cdot 2^3 + 3^6 \cdot 2^2 + 3^7 \cdot 2^1 + 3^8 = 3^9 - 2^9$
 b) $6^k + 3 \cdot 6^{k-1} + 3^2 \cdot 6^{k-2} + \dots + 3^{2k-5} \cdot 6^2 + 3^{2k-3} \cdot 6 + 3^{2k-1} = 3^{2k}$

11. Uz tāfeles uzrakstīti n naturāli skaitļi. Katru divu skaitļu lielākais kopīgais dalītājs ir l , bet mazākais kopīgais dalāmais m . Pierādiet, ka visu doto skaitļu reizinājums ir vienāds ar $m \cdot l^{n-1}$.
12. Dots $8 \times 8 \times 8$ kubs, kas sastāv no 512 mazākiem $1 \times 1 \times 1$ kubiņiem. Kāds ir mazākais mazo kubiņu skaits, kas jānokrāso zilā krāsā, lai katrā $2 \times 2 \times 2$ kubā būtu vismaz viens kubiņš zilā krāsā?
13. Olga apgalvo, ka, ja skaitlim ir divi reizinātāji, kas ir savstarpēji pirmskaitļi, tad skaitļa dalītāju skaits nav pirmskaitlis. Savukārt Renārs absolūti nepiekrīt dotajam apgalvojumam. Kuram no viņiem ir taisnība?
14. Skauti mežā vēlas uzvārīt pelmeņus, kurus būtu jāvāra precīzi 15 minūtes, bet nevienam no viņiem nav pulksteņa. Toties viņi mežā ir izgājuši maģisku zariņu kaudzi, kur katrs zariņš deg precīzi 1 stundu, bet visi zariņi ir atšķirīgi pēc uzbūves ar atšķirīgiem degšanas ātrumiem atsevišķos to posmos (tas ir, ja no zariņa garuma ir nodegusi puse, tas nebūt nenozīmē, ka zariņš ir dedzis 30 minūtes). Kā, izmantojot maģiskos zariņus (kuru ir neierobežoti daudz), var precīzi noteikt 15 minūtes un uzvārīt pelmeņus?
15. Pilī dzīvo k orbitreki ($k > 3$). Jaunākajam no tiem pieder 7 zirgi, 2. jaunākajam 8 zirgi, 3. jaunākajam 9 zirgi ... vecākajam $k+6$ zirgi. Orbitreki pa pāriem stāv naktssardzē. Katrs orbitreks ar katru naktssardzē stāv vismaz vienu reizi. Turklāt katram pārim kā naktssardzes palīgus piešķir vienādu skaitu zirgu tā, ka neviens zirgs netika piešķirts diviem pāriem un neviens zirgs nepalika nepiešķirts nevienam pārim. Pierādiet, ka orbitreku skaits nedalās ar 7.