

RV1.G komandu olimpiāde matemātikā pamatskolai

Svaigā Maize 2004

1. 30 skolēni rakstīja diktātu. Aleksim diktātā bija 14 kļūdas. Citiem skolēniem bija mazāk. Pierādīt, ka klasē var atrast trīs skolēnus, kuri pieļāva vienādu kļūdu skaitu.

2. Karaļvalstī ir 8 pilsētas. Karaliene grib uzbūvēt tādu ceļu sistēmu, lai no katras pilsētas varētu aizbraukt uz katru citu, iebraucot ne vairāk kā vienā citā pilsētā, un no katras pilsētas izietu ne vairāk kā k ceļu. Pie kāda mazākā k tas iespējams?

3. Dots: $a + b = 1$. Pierādīt, ka $a^3 + b^3 + 3ab = 1$.

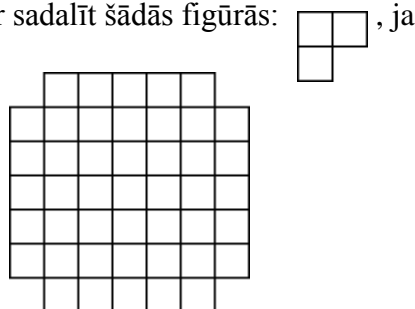
4. Dots $\triangle ABC$. Punkti M, N un K pieder attiecīgi malām BC, CA un AB. Nogriežņi AM, BN un CK krustojas vienā punktā O. Pierādīt:

$$AM + BN + CK > \frac{1}{2} (AB + BC + CA)$$

5. Riņķa līnijas ω_1 un ω_2 krustojas punktos M un K. Caur M novilkta pieskare riņķa līnijai ω_1 , kuras centrs ir O. Pieskare krusto ω_2 arī punktā N, turklāt $MK = NK$. NK krusto ω_1 punktos K un L. Noteikt $\angle MOK$, ja $\angle MKL = \alpha$

6. Dots kvadrāts, kas sastāv no $n \times n$ kvadrātiskām rūtiņām un kuram stūru rūtiņas izgrieztas (attēlā piemērs, ja $n=7$). Vai to var sadalīt šādās figūrās:

- a) $n = 7$;
- b) $n = 8$;
- c) $n = 9$?



7. Ar k apzīmēsim naturālu skaitli, kas lielāks par 1. Virknes pirmais loceklis $a_1=k-1$. $a_n=a_{n-1}+k^{n-1}$. Pierādīt, ka neviens virknes loceklis nedalās ar k.

8. Vai kvadrātā, kas sastāv no 6x6 rūtiņām, var ierakstīt skaitļus no 1 līdz 36 katru vienu reizi tā, lai katrā kolonnā un rindīnā ierakstīto skaitļu reizinājums dalītos ar

- a) 9 ;
- b) 27 ?

9. Noteikt visas a, b un c vērtības, ar kurām vienlaicīgi ir pareizas vienādības

$$a = 1 + \frac{1}{b} \quad b = 1 + \frac{1}{c} \quad c = 1 + \frac{1}{a}$$

10. a, b, c, d - četri pēc kārtas ņemti naturāli skaitļi. Pierādīt, ka $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ dalās ar 4.

11. Noteikt visus reālu skaitļu pārus (a;b), kuriem izpildās vienādība

$$a^2 + b^2 = \frac{5ab}{2}$$

12. Dota lapa ar regulāru trijstūri, lineāls bez atzīmēm, cirkulis un zīmulis. Konstruēt regulāru sešstūri (aprakstīt risinājuma gaitu).

Piezīme: daudzstūri sauc par regulāru, ja visas tā malas ir vienādas un visi leņķi vienlieli.

13. Dotas 7 bumbiņas - 2 no tām ir citādā svarā nekā pārējās 5. Doti sviru svāri bez atsvariem. Vai ar 5 svēršanām var atrast 2 citādās bumbiņas?

14. Skaitļu pāri sauc par *spēcīgi*, ja šo skaitļu kvadrātu starpība ir vienāda ar kāda skaitļa kubu, bet šo skaitļu kubu starpība - ar kāda skaitļa kvadrātu.

- a) atrast kaut vienu *spēcīgu* skaitļu pāri;
- b) pierādīt, ka eksistē bezgalīgi daudz *spēcīgi* skaitļu pāri.

15. Apskatām visus veselos un pozitīvos skaitļus, kas nesatur citus ciparus kā 1; 2; 3; 4 un 5. Sakārtosim tos augošā secībā un ar n apzīmējam skaitli, kas šajā sarakstā atrodas 2004-ajā vietā.

- a) cik ciparu ir skaitlim n ?
- b) atrast skaitli n.