



Komandu olimpiāde matemātikā

Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-5 punktiem. Uzdevumu risināšanai dotas 3 astronomiskās stundas. Risinājumos ir jāuzrāda veiktie aprēķini un risinājuma gaita.

Uzdevumi 9. klasei

1. Irmis skatījās japāņu animācijas filmu, kurā skolotājs dusmojās uz meiteni, kura nepildīja matemātikas mājasdarbus. Taču tad Irmis šajā filmā pamanīja četras izpildītas sakarības, kurās skaitļi aizstāti ar japāņu simboliem:

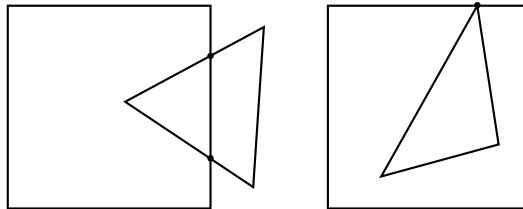
$$\text{五} \cdot \text{二} = \text{十} \quad \text{二} + \text{四} = \text{六} \quad \text{二} \cdot \text{二} = \text{四} \quad \text{四} + \text{四} < \text{十}$$

Irmis zina, ka katrs simbols atbilst tieši vienam veselam skaitlim no 0 līdz 10 ieskaitot, un katrai vērtībai neatbilst vairāk par vienu simbolu. Palīdziet Irmim saprast, kāda ir katra simbola vērtība!

2. Aija un Jānis spēlē sekojošu spēli: katrā gājienā ir iespējams izvēlēties un uzrakstīt kādu skaitli no 10 līdz 99 ieskaitot, vai arī pārbaudīt, vai divu skaitļu starpība dalās ar 10. Uzvar tas spēlētājs, kuram pirmajam izdodas atrast divus skaitļus, kuru starpība dalās ar 10.

Ja Aija sāk, tad kurš no spēlētājiem vienmēr var uzvarēt, spēlējot pareizi?

3. Attēlos parādīts kvadrāts un trīsstūris, kuri krustojas attiecīgi divos un vienā punktā:



Nosaki un parādi visas iespējas, cik krustpunktu var būt kvadrātam un trīsstūrim.

4. Pierādīt, ka $2015!$ dalās ar 2016.

Pieraksts $n!$ apzīmē visu naturālo skaitļu no 1 līdz n ieskaitot reizinājumu: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Piemēram, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

5. Uz tāfeles uzrakstīti visi veseli skaitļi no 1 līdz 2016 ieskaitot. Ar vienu gājienu ir iespējams izdzēst pirmos divus skaitļus un to summu pierakstīt virknes galā.

(a) Cik gājieni nepieciešami, lai virknē paliktu tikai viens skaitlis?

(b) Kādas vērtības var pieņemt šis skaitlis?

6. Plaknē uzzīmētas 44 taisnes, un nekādas divas no tām nav paralēlas. Pierādīt, ka noteikti atradīsies divas tādas taisnes, kuras veidos leņķi, kas mazāks par 4, 2 grādiem.

7. Šajā uzdevumā aplūkosim situāciju no spēles "Pokemon GO". Šajā spēlē ir tāda funkcija, ka staigājot var "perēt" olas, un tās izšķīlas pie noteikta noieta kilometru daudzuma.

Diemžēl spēlē ir problēma - tā rēķina noieta attālumu ik pēc 10 s. Līdz ar to, ejot pa liektu līniju, attālums, ko aplikācija izrēķina, ir mazāks nekā attālums, kas reāli tiek noiets. Arī Liedars vēlējās "izperēt" olu.

Lai tā izšķiltos, viņam jānoiet vismaz 2000π m. Šim nolūkam viņš atrada apļveida taku ar rādiusu 100 m. Zināms, ka Liedars var noiet 1 apli 1 minūtē. Vai Liedara ola izšķīlsies pēc 10 apļu noiešanas?

8. Elvijs burtnīcā pa vairākām lapām pierakstīja skaitļu un kastīšu virkni, kas sastāv no visiem skaitļiem no 1 līdz 2016, un starp katriem diviem skaitļiem uzzīmēja tukšu kastīti:

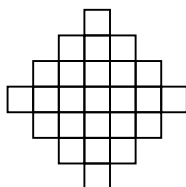
$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square \dots \square 2015 \square 2016$$

Elvijs aizvietoja katru kastīti ar vai nu +, vai - zīmi. Pēc tam, veicot nepieciešamās darbības, Elvijs ieguva rezultātu 1337. Pierādīt, ka Elvijs ir kļūdījies savos aprēķinos!

9. Cirpis uzrakstīja visus skaitļus no 1 līdz 999 pēc kārtas bez atstarpēm un ieguva ļoti garu skaitli:

$$12345678910111213 \dots 997998999$$

- (a) Cik ciparu ir Cirpja skaitlim?
(b) Cik cipari skaitļa pierakstā ir vienādi ar 1?
(c) Cirpis uzraksta vēl vienu skaitli šādā pat veidā, tikai šoreiz izmanto skaitļus no 1 līdz $10^n - 1$. Cik ciparu jauniegūtajā skaitlī ir vienādi ar 1?
10. Ingum mājās ir 25 trenēti vēži. Katram vēzim ir savs kvadrātveida būrītis, un visi būrīši ir novietoti, kā parādīts attēlā:



Katram būrītim ir eja uz jebkuru citu būrīti, ar kuru tam ir kopēja mala, turklāt ejas ir pietiekami lielas, lai divi vēži varētu iziet cauri tām vienlaikus. Ingus ir iemācījis saviem vēžiem sekojošu triku: kad Ingus sasiņ plaukstu, katrs vēzis pārvietojas uz jebkuru blakusesošu būrīti. Ja sākumā katrs vēzītis atrodas savā būrī, tad pierādīt, ka pēc vienas plaukstu sasišanas būs vismaz 7 tukši būrīši.

11. Kvadrāta $ABCD$ laukums ir S . Tā iekšpusē ir atzīmēts punkts O . Punkti E, F, G, H ir simetriski punktam O attiecībā pret $ABCD$ malu viduspunktiem. Aprēķināt četrstūra $EFGH$ laukumu!
12. Mazais Zajka un Gailis grib sadalīt "Kungu maizes" klaipu tā, lai 42 cilvēkiem katram tiek pa vienam gabalam. Šis maizes klaips atbilst taisnstūra paralēlskaldnim ar izmēriem $1 \times 1 \times 2$. Diemžēl Gaiļa mājās ir ļoti specifisks maizes nazis, kurš spēj maizi griezt tikai paralēli kādai no tās malām, un tas nevar pārtraukt griezt, kamēr nav sasniedzis pretējo maizes skaldni. Mazais Zajka un Gailis negrib ilgi kavēties, tāpēc viņi vēlas šo darbu izdarīt ar pēc iespējas mazāk griezieniem.
Palīdzi viņiem atrast mazāko griezienu skaitu, ar kuru būtu iespējams sagriezt maizi tieši 42, ne obligāti vienādos, gabalos.

13. Zināms, ka x un y ir pozitīvi reāli skaitļi, un $x + y = 1$. Pierādīt, ka

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$$

14. Katram ASV Kongresa loceklim ir ne vairāk kā 5 ienaidnieki (nais ir abpusējs) starp pārējiem kongresa locekļiem. Pierādīt, ka visus kongresa pārstāvjus iespējams sadalīt divās palātās tā, ka katram pārstāvim savā palātā ir ne vairāk kā 2 ienaidnieki.
15. Atrast visus tādus naturālus skaitļus x un c , ka

$$\frac{31x^4}{c^3 + c^2x + cx^2 + x^3} + x = c$$