



## Komandu olimpiāde matemātikā

Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-5 punktiem. Uzdevumu risināšanai dotas 3 astronomiskās stundas. Risinājumos ir jāuzrāda veiktie aprēķini un risinājuma gaita.

### Uzdevumi 11. klasei

1. Olga vēlas uz 2 gadiem abonēt mobilos sakarus. *Cablecom* piedāvā SIM karti par 49 frankiem un ikmēneša maksu 29 Fr. Identiskam plānam *Salt* piedāvā SIM par 1 Fr, mēneša maksu 35 Fr, un pieslēgšanas bonusu 100 Fr (atvilktis no pirmajiem rēķiniem). Kurš piedāvājums ir izdevīgāks?
2. Cementa ražotāja SIA «Cemex» realizējusi pilotprojektu, kaļķakmens karjerā «Kūmas» uzbūvējot 500 metrus garu ceļa posmu no valčbetona, un ir gatava sadarboties ar ceļu būves uzņēmumiem un VAS «Latvijas Valsts ceļi» šādu ceļu būvniecībā Latvijā. «Cemex» valdes loceklis Ēriks Maikls Trusevics stāstīja, ka betona ceļu izmaksas ir par aptuveni 20% lētākas nekā asfalta ceļu izmaksas, piemēram, šī eksperimentālā ceļa izmaksas bija 45 eiro par kvadrātmetru. Cik izmaksāja šis ceļš? Izskaidro pieņēmumus! Cik izmaksātu šāds asfalta ceļš?
3. Atrodiet ciparus  $a$ ,  $b$ ,  $c$  tā, lai  $\overline{abc} = a! + b! + c!$ .  
*Zināšanai:* Naturālam  $n$ ,  $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ , bet  $0! = 1$ .  
 $\overline{abc}$  apzīmē skaitli, ko veido cipari  $a$ ,  $b$ ,  $c$  norādītajā secībā.  
Piemēram, ja  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ , tad  $\overline{abc} = 123$ .
4. Doti  $n \geq 2$  pozitīvi skaitļi. Kas ir lielāks: šo skaitļu summas kvadrāts, vai arī šo skaitļu kvadrātu summa?
5. Pēc vēsturiski ātrākās kosmosa kuģa palaišanas 2006. gadā, *New Horizons* šī gada 14. jūlijā palidoja garām Plūtonam 12 500 km attālumā. Zonde lidoja ar ātrumu 49 350 km/h un lielāko daļu dienas pavadīja, uzņemot Plūtona attēlus. Pieņemot, ka zonde lidoja taisni un ar nemainīgu ātrumu, aprēķini, cik ilgi bija iespēja uzņemt attēlus mazāk kā 40 000 km attālumā no Plūtona!
6. Dota ciparu virkne 1234468..., kurā katrs nākamais cipars ir pēdējais cipars no skaitļa, kurš iegūts, reizinot iepriekšējos 4 ciparus. Atrodiet šīs virknes 2015. ciparu!
7. Kuram naturālam skaitlim zem 1000 ir visvairāk naturālu dalītāju? Aprakstiet, kā atradāt šo skaitli. Šoreiz nav nepieciešams pierādīt, ka atrasts labākais iespējamais skaitlis.
8. Dotas divas paralēlas taisnes  $t$  un  $m$  un divi punkti plaknes daļā starp šīm taisnēm. Neviens no punktiem neatrodas uz dotajām taisnēm. Atrodiet īsāko ceļu starp abiem punktiem tā, lai tas iekļautu vismaz vienu punktu no taisnes  $t$  un vienu punktu no taisnes  $m$ .
9. Adventes kalendāram ir 24 durtiņas. Aiz tieši vienām slēpjas zelta jēriņš, bet aiz pārējām - šokolādes, turklāt visi varianti ir vienādi varbūtīgi. Ilze Joti grib iegūt zelta jēriņu, taču tas iespējams tikai, ja uzmin īstās durtiņas. Viņa drīkstēs izvēlēties kādas no durtiņām, tad Renārs atvērs 22 no pārējām, parādot, ka tajās ir šokolāde. Tātad paliks tikai divas aizvērtas durtiņas. Ilzei būs iespēja nomainīt savu izvēli. Vai izmantot šo iespēju un mainīt izvēli? Kā tas izmainīs izredzes?
10. Kādiem veseliem skaitļiem  $a$  un  $b$  izpildās sekojošā vienādība?

$$\frac{1}{a} + \frac{a}{b} + \frac{1}{ab} = 1$$

- 11.** Dalīšanos ar 7 var pārbaudīt šādi: noņemam dotajam skaitlim pēdējo ciparu  $c$  un atņemam no iegūtā skaitļa divreiz  $c$ . Atkārtojam šo procedūru, līdz iegūstam skaitli, par kura dalīšanos ar 7 mēs zinām. Piemēram, lai pārbaudītu, vai 525 dalās ar 7, apskatām  $52 - 2 \cdot 5 = 42$ . Šis dalās ar 7, tātad sākotnējais 525 arī dalās. Izskaidrot, kādēļ šī metode strādā!
- 12.** Cik veidos uz  $8 \times 8$  šaha laukuma var izvietot 8 vienādus torņus tā, lai tie viens otru neapdraudētu? Torņi apdraud viens otru, ja tie atrodas uz vienas un tās pašas laukuma kolonnas vai rindas.
- 13.** Zane un Andis spēlē krustiņus un nullītes trijās dimensijās, izmantojot  $3 \times 3 \times 3$  kubu, kas sastāv no 27 vienības ( $1 \times 1 \times 1$ ) kubiņiem. Spēlētāji izdara gājienus pamīšus. Uzvar tas, kurš pirmais kā savus atzīmē trīs vienības kubiņus, kuru centri atrodas uz vienas taisnes. Andis, būdams labs draugs, ļauj Zanei spēli sākt. Vai Zane, pareizi spēlējot, vienmēr varēs uzvarēt? Piedāvājiēt savu algoritmu, kā Zanei vienmēr uzvarēt vai Andim panākt, ka Zane nevar uzvarēt.
- 14.** Pierādīt, ka vienādojumam  $x^2 - 5xy - 6y^2 = 3$  nav atrisinājuma, kur  $x$  un  $y$  ir veseli skaitļi.  
*Padoms:* apskatīt atlikumu, dalot ar 7.
- 15.** Andis cītīgi seko līdz basketbola zvaigznes Krista Ziņģa soda metienu statistikai. Andis uzskaita precīzos Krista soda metienus no visiem viņa izdarītajiem soda metieniem. Pēc nospēlētas pussezona Krista rādītājs precīzajos soda metienos bija zem 80%. Sezonas beigās spēlētāja vidējais rādītājs jau bija virs 80%. Vai sezonas laikā noteikti bija tāds brīdis, kad Krista Ziņģis bija realizējis tieši 80% no izpildītajiem soda metieniem?