



## Komandu olimpiāde matemātikā

Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-5 punktiem. Uzdevumu risināšanai dotas 3 astronomiskās stundas. Risinājumos ir jāuzrāda veiktie aprēķini un risinājuma gaita.

### Uzdevumi 10. klasei

1. Olga vēlas uz 2 gadiem abonēt mobilos sakarus. *Cablecom* piedāvā SIM karti par 49 frankiem un ikmēneša maksu 29 Fr. Identiskam plānam *Salt* piedāvā SIM par 1 Fr, mēneša maksu 35 Fr, un pieslēgšanas bonusu 100 Fr (atvilks no pirmajiem rēķiniem). Kurš piedāvājums ir izdevīgāks?
2. Edgars izveidoja 100m garu velotrasī mežā un vēlējās to noklāt ar šķembām, lai neveidotos dubļi. Cik kubikmetru šķembu vajadzētu iegādāties? Veikt un izskaidrot nepieciešamos pieņēmumus!
3. Atrodiet ciparus  $a, b, c$  tā, lai  $\overline{abc} = a! + b! + c!$ .  
*Zināšanai:* Naturālam  $n$ ,  $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ , bet  $0! = 1$ .  
 $\overline{abc}$  apzīmē skaitli, ko veido cipari  $a, b, c$  norādītajā secībā.  
Piemēram, ja  $a = 1, b = 2, c = 3$ , tad  $\overline{abc} = 123$ .
4. *Rīgas Satiksme* ir izsludinājusi iepirkumu 20 jaunu zemās grīdas tramvaju iegādei. Orientējošā iepirkuma summa ir 70 miljoni eiro. Iepirkuma procedūra paredz, ka uzvarētājam jāsarāžo un jāpiegādā 15 trīs sekciju un 5 četru sekciju zemās grīdas tramvaji. Cik maksātu divu sekciju tramvajs, ja pieņem, ka sekcijas tramvaja galos ir par 125 tūkstošiem dārgākas nekā vidū?
5. Doti  $n \geq 2$  pozitīvi skaitļi. Kas ir lielāks: šo skaitļu summas kvadrāts, vai arī šo skaitļu kvadrātu summa?
6. Sanāksmē piedalās 30 dalībnieki. Katram no viņiem ir portatīvais dators ar pilnībā uzlādētu bateriju, kura var izturēt 4 stundas bez lādēšanas (neatkarīgi no darbībām, kas tiek veiktas datorā), un datora lādētājs. Sanāksmes telpā ir 3 elektrības rozetes. Vai sanāksme var ilgt divas pilnas diennaktis, lai nevienam darbiniekam neizlādētos dators, ja zināms, ka bateriju no pilnīgi tukšas līdz pilnai var uzlādēt pusstundā (pat tad, ja tas tiek lietots), turklāt tā lādējas vienmērīgi? Pieņemam, ka lādētāju pārslēgšana laiku neaizņem.
7. Pēc vēsturiski ātrākās kosmosa kuģa palaišanas 2006. gadā, *New Horizons* šī gada 14. jūlijā palidoja garām Plūtonam 12 500 km attālumā. Zonde lidoja ar ātrumu 49 350 km/h un lielāko daļu dienas pavadīja, uzņemot Plūtona attēlus. Pieņemot, ka zonde lidoja taisni un ar nemainīgu ātrumu, aprēķini, cik ilgi bija iespēja uzņemt attēlus mazāk kā 40 000 km attālumā no Plūtona!
8. Kuram naturālam skaitlim zem 1000 ir visvairāk naturālu dalītāju? Aprakstiet, kā atradāt šo skaitli. Šoreiz nav nepieciešams pierādīt, ka atrasts labākais iespējamais skaitlis.
9. Dalīšanos ar 7 var pārbaudīt šādi: noņemam dotajam skaitlim pēdējo ciparu  $c$  un atņemam no iegūtā skaitļa divreiz  $c$ . Atkārtojam šo procedūru, līdz iegūstam skaitli, par kura dalīšanos ar 7 mēs zinām. Piemēram, lai pārbaudītu, vai 525 dalās ar 7, apskatām  $52 - 2 \cdot 5 = 42$ . Šis dalās ar 7, tāpat sākotnējais 525 arī dalās. Izskaidrot, kādēļ šī metode strādā!
10. Dotas divas paralēlas taisnes  $t$  un  $m$  un divi punkti plaknes daļā starp šīm taisnēm. Neviena no punktiem neatrodas uz dotajām taisnēm. Atrodiet īsāko ceļu starp abiem punktiem tā, lai tas iekļautu vismaz vienu punktu no taisnes  $t$  un vienu punktu no taisnes  $m$ .

- 11.** Ciemā vidējais rūķīša augums ir 1m. Zināms, ka, garākā rūķīša augumu dalot ar īsākā rūķīša augumu, iegūstam  $a$ . Pierādīt, ka visiem rūķīšiem augums ir intervālā  $[1/a, a]$ .
- 12.** Cik veidos uz  $8 \times 8$  šaha laukuma var izvietot 8 vienādus torņus tā, lai tie viens otru neapdraudētu? Torņi apdraud viens otru, ja tie atrodas uz vienas un tās pašas laukuma kolonnas vai rindas.
- 13.** Zane un Andis spēlē krustiņus un nullītes trijās dimensijās, izmantojot  $3 \times 3 \times 3$  kubu, kas sastāv no 27 vienības ( $1 \times 1 \times 1$ ) kubiņiem. Spēlētāji izdara gājienus pamīšus. Uzvar tas, kurš pirmais kā savus atzīmē trīs vienības kubiņus, kuru centri atrodas uz vienas taisnes. Andis, būdams labs draugs, ļauj Zanei spēli sākt. Vai Zane, pareizi spēlējot, vienmēr varēs uzvarēt? Piedāvājiet savu algoritmu, kā Zanei vienmēr uzvarēt vai Andim panākt, ka Zane nevar uzvarēt.
- 14.** Pierādīt, ka vienādojumam  $x^2 - 5xy - 6y^2 = 3$  nav atrisinājuma, kur  $x$  un  $y$  ir veseli skaitļi.  
*Padoms:* apskatīt atlikumu, dalot ar 7.
- 15.** Andis cītīgi seko līdz basketbola zvaigznes Krista Ziņģa soda metienu statistikai. Andis uzskaita precīzos Krista soda metienus no visiem viņa izdarītajiem soda metieniem. Pēc nospēlētas pussezona Krista rādītājs precīzajos soda metienos bija zem 80%. Sezonas beigās spēlētāja vidējais rādītājs jau bija virs 80%. Vai sezonas laikā noteikti bija tāds brīdis, kad Krista Ziņģis bija realizējis tieši 80% no izpildītajiem soda metieniem?