

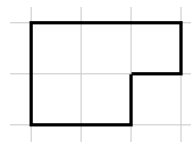


Komandu olimpiāde matemātikā

Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-5 punktiem. Uzdevumu risināšanai dotas 3 astronomiskās stundas. Risinājumos ir jāuzrāda veiktie aprēķini un risinājuma gaita.

Uzdevumi 11. klasei

- Edgaram ir divas *Credit Suisse* norēķinu kartes. Par skaidras naudas izņemšanu ārzemēs ar *Maestro* karti komisija ir 5 Šveices franki + 0.5% no izņemtās summas. Savukārt *Master* kartei komisija ir 4% no izņemtās summas, bet ne mazāk kā 10 franki. Ar kuru karti ir izdevīgāk izņemt skaidru naudu?
- Vispārējās negācijas, kas piemeklējušas Latvijas metalurģijas flagmani un izpaužas kā strauja ražošanas apjoma samazināšanās un nespēja tikt galā ar savām saistībām, izraisījušas straujas uzņēmuma akciju cenas svārstības. 2013. gada 12. aprīlī kompānijas akcijas cena nokritās par 86%, bet nākamajā dienā pieauga par 85,43%. Vai akciju vērtība tādējādi atgriezās ļoti tuvu ($\pm 3\%$) sākotnējai vērtībai, pirms dotajām svārstībām?
- Edgara 70 kareivju armija 3 frontēs cīnās pret Olgas 40 kareivju armiju. Tā armija, kas iegūst uzvaru vairāk frontēs nekā pretinieks, uzvar karā. Vai Olga var droši uzvarēt karā, ja viņa zina, kā Edgars ir sadalījis savu armiju pa 3 frontēm? (Cīņu frontē uzvar tā armija, kurai ir vairāk kareivju).
- Sestdienas rītā Mārtiņš apsolīja Martu vakarā aizvest uz teātri, ja Marta atradīs tādus divus dažādus naturālus skaitļus, ka pirmā skaitļa kubs ir vienāds ar otrā skaitļa kvadrātu. Vai Martai ir cerības tikt uz teātri?
- Vai no tādām figūrām, kāda attēlota pa labi (to grozot un spoguļojot), var salikt:
 - taisnstūri ar izmēru 7×10 rūtiņas,
 - taisnstūri ar izmēru 7×7 rūtiņas,
 - taisnstūri ar izmēru 9×9 , kuram izņemta vidējā rūtiņa?
- Kāds ir mazākais skaitlis, kuram ir tieši 7 dalītāji?
- Fotoattēla gaišums ir atkarīgs no **gaismas daudzuma**, kas nonāk uz gaismjutīgā elementa, un to var regulēt ar trim parametriem. Tas ir tieši proporcionāls ekspozīcijas ilgumam (slēdža ātrumam). Tas atkarīgs arī no diafragmas atvēruma. Šis "F" skaitlis tiek iegūts pēc formulas $F = \text{fokusa attālums} / \text{atvēruma diametrs}$, tātad mazāks skaitlis nozīmē lielāku atvērumu un vairāk ieplūstošās gaismas. Ieplūstošās gaismas daudzums ir proporcionāls (apļveida) atvēruma *laukumam*. Trešais parametrs ir gaismjutīgā elementa jutīgums, jeb ISO - dubultojot ISO skaitli, pietiek ar pusi no gaismas daudzuma. Automātiskais režīms piedāvā treknajā drukā dotos parametrus. Aizpildi tukšās rūtiņas tabulā, lai iegūtu citas kombinācijas ar tādu pašu bildes gaišumu (pierādījums nav nepieciešams)! Fokusa attālums netiek mainīts.



Slēdža ātrums sek.	1/125	1/250	1/125	?	1/500	1/1000
Diafragmas atvērums	F5.6	F5.6	?	F2.8	?	F4.0
ISO	200	?	400	100	200	?

- 8.** Raivis, Kristiāna, Anete, Marta un Mārtiņš devās velobraucienā uz Valmieru, kur apmeklēja arī teātri. Teātra biļete vienam cilvēkam maksā 8 Ls un tās visiem nopirka Kristiāna. Raivis, Marta un Mārtiņš Kristiānai par biļetēm naudu atdeva jau pirms brauciena. Kristiāna uz Valmieru aizbrauca piektdienas vakarā un nopirka produktus brokastīm, kas maksāja 15 Ls. Pārējie brauca sestdienas rītā un visiem biļetes nopirka Raivis, kopā samaksājams 15.36 Ls. Raivis arī nopirka uzkodas velobrauciena pirmajai daļai par 3 Ls, savukārt Mārtiņš nopirka produktus vakariņām par 18 Ls. Par visu pārējo katrs maksāja individuāli. Piedāvāriet ērtu veidu, kā ceļabiedriem nokārtot rēķinus, veicot pēc iespējas mazāk savstarpējus maksājumus! Ņemiet vērā, ka Mārtiņš maksā arī par Martu!
- 9.** Plaknē doti trīs punkti. Kā, izmantojot cirkuli un lineālu bez atzīmēm, var konstruēt riņķa līniju, kas satur visus šos trīs punktus? Pamatojiet, kāpēc konstrukcija strādā.
- 10.** Vai ir iespējams izkrāsot $n \times n$ kvadrāta rūtiņas melnā un baltā krāsā tā, lai nevarētu atrast $k \times k$ apakškvadrātu ($2 \leq k \leq n$), kura četras stūra rūtiņas ir vienādā krāsā, gadījumā, ja
- $n = 4$;
 - $n = 7$?
- 11.** Pieņemsim, ka mēs gribam atrisināt **10.** uzdevumā aprakstīto krāsošanas problēmu, ar datoru pārbaudot pilnīgi visus krāsojumus. Pieņemot, ka dators 1 sekundē var pārbaudīt 1 miljardu (10^9) krāsojumu, kāds ir lielākais n , kuram iespējams pārbaudīt visus krāsojumus aptuveni nedēļas laikā? Un šī gadsimta laikā? (Drīkst izmantot, ka $2^{10} \approx 10^3$.)
- 12.** Pierādīt, ka jebkuram naturālam skaitlim n ir spēkā: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$.
- 13.** Sacensībās piedalās 2013 motobraucēji, kuri brauc pa 1 km garu apli. Pirmais no motobraucējiem brauc ar ātrumu 1 km/h, otrais motobraucējs brauc ar ātrumu 2 km/h, ..., 2013. motobraucējs brauc ar ātrumu 2013 km/h. Cik apdzīšanas par apli būs notikušas, kad sacensībās būs pagājuši stunda? Braucējam apdzienot citu par diviem apļiem, skaitām tās kā divas apdzīšanas par apli.
- 14.** Neša kungs piedāvā par nelielu samaksu spēlēt spēli ar laimestu. $n \times n$ tabulā katrā rūtiņā ir ierakstīts kāds skaitlis. Spēlei ir divi varianti:
- vispirms tu izvēlies no katras rindiņas pa skaitlim, tad Neša kungs izvēlas vienu no tiem un izmaksā atbilstošu laimestu;
 - vispirms Neša kungs izvēlas no katras kolonnas pa skaitlim, tad tu izvēlies vienu no tiem un saņem atbilstošu laimestu.
- Kurš no variantiem būs tev izdevīgāks?
- 15.** Renāram ir 16 kārtis. Ilze izvēlas vienu, iegaumē to un noliek atpakaļ kaudzītē kādā nejaušā vietā, kā arī pasaka savu mīļāko skaitli n ($1 \leq n \leq 16$). Renārs pamīšus sadala kārtis divās vienādās kaudzītēs (tagad un turpmāk - pirmo kārti pirmajā, otro - otrajā, trešo - pirmajā, utt.) un palūdz Ilzei norādīt, kurā kaudzītē ir viņas kārts. Tālāk Renārs saliek abas kaudzītes kopā un atkal sadala divās citās kaudzītēs, un Ilze norāda, kurā kaudzītē ir viņas kārts. Šo procesu atkārto vēl divas reizes. Beigās Renārs saliek visas kārtis kopā, uz galda noliek $n - 1$ kārti no kaudzītes augšas un kā n -to kārti uz galda uzliek Ilzes kārti. Kā Renārs to izdarīja? Paskaidro un uzraksti skaidru instrukciju, kā realizēt šo kāršu triku.