



Komandu olimpiāde matemātikā

Katrs uzdevums tiek vērtēts ar 0-5 punktiem. Uzdevumu risināšanai dotas 3 astronomiskās stundas. Risinājumos ir jāuzrāda veiktie aprēķini un risinājuma gaita.

Uzdevumi 10. klasei

- Orbitreks vēlas nopirkt dzīvokli, kura cena ir intervālā no 20 000 Ls līdz 40 000 Ls un kura platība ir intervālā no 45m² līdz 70m². Kāds ir cenas par kvadrātmētru (Ls/m²) intervāls, kādā Orbitreks meklē dzīvokli?
- Ilze kļuva par auklīti, kad viņai bija 18 gadu. Kad viņa pieskatīja kādu bērnu, tā vecums nekad nebija vairāk par pusi no viņas vecuma. Ilzei pašlaik ir 25 gadi, un pieskatīt bērnus viņa beidza pirms 3 gadiem. Kāds šobrīd ir lielākais iespējamais vecums bērnam, ko ir pieskatījusi Ilze?
- Sestdienas rītā Mārtiņš apsolīja Martu vakarā aizvest uz teātri, ja Marta atradīs tādus divus dažādus naturālus skaitļus, ka pirmā skaitļa kubs ir vienāds ar otrā skaitļa kvadrātu. Vai Martai ir cerības tikt uz teātri?
- Cik veidos uz 5 × 10 rūtiņu laukuma var uzzīmēt trijstūri *ABC*, ja zināms, ka virsotnes ir rūtiņu stūros, virsotnē *A* ir taisns leņķis, un mala *AC* ir paralēla rūtiņu laukuma garākajai malai,
 - ja virsotnes *ABC* nosauktas pulksteņrādītāja virzienā;
 - ja virsotnes var būt jebkādā secībā?
- Kāds ir mazākais skaitlis, kuram ir tieši 7 dalītāji?
- Fotoattēla gaišums ir atkarīgs no **gaismas daudzuma**, kas nonāk uz gaismjutīgā elementa, un to var regulēt ar trim parametriem. Tas ir tieši proporcionāls ekspozīcijas ilgumam (slēdža ātrumam). Tas atkarīgs arī no diafragmas atvēruma. Šis "F" skaitlis tiek iegūts pēc formulas $F = \text{fokusa attālums} / \text{atvēruma diametrs}$, tātad mazāks skaitlis nozīmē lielāku atvērumu un vairāk iepļūstošās gaismas. Iepļūstošās gaismas daudzums ir proporcionāls (apļveida) atvēruma *laukumam*. Trešais parametrs ir gaismjutīgā elementa jutīgums, jeb ISO - dubultojot ISO skaitli, pietiek ar pusi no gaismas daudzuma. Automātiskais režīms piedāvā treknajā drukā dotos parametrus. Aizpildi tukšās rūtiņas tabulā, lai iegūtu citas kombinācijas ar tādu pašu bildes gaišumu (pierādījums nav nepieciešams)! Fokusa attālums netiek mainīts.

Slēdža ātrums sek.	1/125	1/250	1/125	?	1/500	1/1000
Diafragmas atvēruma	F5.6	F5.6	?	F2.8	?	F4.0
ISO	200	?	400	100	200	?

- Latvijā bērniem obligāti jāpabeidz pamatskola. Šobrīd uz profesionālajām izglītības iestādēm aiziet 36% jauniešu pēc 9.klases beigšanas. Pieņemsim, ka visi pārējie turpina mācības vidusskolā ("izglītība pēc 9.klases beigšanas būtu noteikti jāturpina, jo palikšana ar šādu izglītības līmeni ir drošākais ceļš uz bezdarbnieku rindām," BNS). 9% vidusskolēnu dažādu iemeslu dēļ pārtrauc mācības un aiziet no vidusskolas. 37% vidusskolu absolventu neturpina mācības augstskolā. Balstoties uz doto informāciju (un izskaidrojot savus papildu pieņēmumus), aprēķināt, cik procentiem cilvēku darbspējīgā vecumā ir iegūta augstākā izglītība.

- 8.** Raivis, Kristiāna, Anete, Marta un Mārtiņš devās velobraucienā uz Valmieru, kur apmeklēja arī teātri. Teātra biļete vienam cilvēkam maksā 8 Ls un tās visiem nopirka Kristiāna. Raivis, Marta un Mārtiņš Kristiānai par biļetēm naudu atdeva jau pirms brauciena. Kristiāna uz Valmieru aizbrauca piektdienas vakarā un nopirka produktus brokastīm, kas maksāja 15 Ls. Pārējie brauca sestdienas rītā un visiem biļetes nopirka Raivis, kopā samaksājams 15.36 Ls. Raivis arī nopirka uzkodas velobrauciena pirmajai daļai par 3 Ls, savukārt Mārtiņš nopirka produktus vakariņām par 18 Ls. Par visu pārējo katrs maksāja individuāli. Piedāvāriet ērtu veidu, kā ceļabiedriem nokārtot rēķinus, veicot pēc iespējas mazāk savstarpējus maksājumus! Nemiet vērā, ka Mārtiņš maksā arī par Martu!
- 9.** Katram cilvēkam tiek piešķirts Renāra skaitlis, kurš norāda, cik rokas spiedienu "attālumā" dotais cilvēks ir no Renāra. Renāra paša Renāra skaitlis ir 0. Tiem, kas Renāram personīgi ir spieduši roku, Renāra skaitlis ir 1. Ja starp tiem cilvēkiem, kam kāds cilvēks X ir personīgi spiedis roku, mazākais Renāra skaitlis ir n , tad cilvēka X Renāra skaitlis ir $n + 1$. Analogi Ilzes skaitlis uzrāda rokas spiedienu "attālumu" līdz Ilzei. Savukārt katra cilvēka Ilzes-Renāra skaitlis ir Renāra un Ilzes skaitļu summa. Pierādīt, ka tāds cilvēks, kuram Renāra-Ilzes skaitlis ir vismazākais, nav viens vienīgs.
- 10.** Pierādīt, ka, aprēķinot harmonisko summu $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{N}$ pietiekami lielam N , mēs varēsim pārsniegt jebkuru prasīto skaitli.
Padoms: salīdzini šo summu ar $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$
- 11.** Vai ir iespējams izkrāsot $n \times n$ kvadrāta rūtiņas melnā un baltā krāsā tā, lai nevarētu atrast $k \times k$ apakškvadrātu ($2 \leq k \leq n$), kura četras stūra rūtiņas ir vienādā krāsā, gadījumā, ja
- $n = 4$;
 - $n = 7$?
- 12.** Pieņemsim, ka mēs gribam atrisināt **11.** uzdevumā aprakstīto krāsošanas problēmu, ar datoru pārbaudot pilnīgi visus krāsojumus. Pieņemot, ka dators 1 sekundē var pārbaudīt 1 miljardu (10^9) krāsojumu, kāds ir lielākais n , kuram iespējams pārbaudīt visus krāsojumus aptuveni nedēļas laikā? Un šī gadsimta laikā? (Drīkst izmantot, ka $2^{10} \approx 10^3$.)
- 13.** Kādi ir iespējamie vienādmalu trijstūra malas garumi, ja zināms, ka to var sagriezt vienādsānu trapecēs, kuru viena pamata garums ir 2 cm, bet pārējās malas ir 1 cm garas.
- 14.** Neša kungs piedāvā par nelielu samaksu spēlēt spēli ar laimestu. $n \times n$ tabulā katrā rūtiņā ir ierakstīts kāds skaitlis. Spēlei ir divi varianti:
- vispirms tu izvēlies no katras rindiņas pa skaitlim, tad Neša kungs izvēlas vienu no tiem un izmaksā atbilstošu laimestu;
 - vispirms Neša kungs izvēlas no katras kolonnas pa skaitlim, tad tu izvēlies vienu no tiem un saņem atbilstošu laimestu.
- Kurš no variantiem būs tev izdevīgāks?
- 15.** Apī sakārtotas 2013 monētas. Renārs no kādas monētas sāk skaitīt un katru k -to monētu apgriez, līdz viņam jāapgriez jau apgriezta monēta - to Renārs nedara un beidz griešanu. Pie kādām k vērtībām Renārs apgriezīs visas monētas?